

中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-113)

中国科学院工程地质力学重点实验室

资助

# 非线性

# 岩土力学基础

秦四清 王思敬 孙 强 著  
徐国存 王媛媛 马 平

地 质 出 版 社

# FEIXIANXING YANTU LIXUE JICHU

Qin Siqing Wang Sijing Sun Qiang  
Xu Guocun Wang Yuanyuan Ma ping

ISBN 978-7-116-05696-1



9 787116 056961 >

定价：30.00元

中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-113) 资助  
中国科学院工程地质力学重点实验室

# 非线性岩土力学基础

秦四清 王思敬 孙 强 著  
徐国存 王媛媛 马 平

地 质 出 版 社

· 北 京 ·

## 内 容 提 要

本书是关于非线性岩土力学的入门专著。本书对用非线性科学理论(耗散结构理论、协同学、突变理论、混沌动力学等)解决岩土体失稳演化过程的非线性行为问题,给出了系统完整的研究思路和方法。本书重点提出了具有不同力学属性介质相互作用的极限状态确定非线性分析理论,并用它研究了产生主动土压力的充要条件、刚性抗拔桩产生极限抗拔力的充要条件、斜坡失稳演化机制、重力坝沿软弱结构面滑动的失稳模型与突变机制。书中还研究了滑移-弯曲斜坡与层状岩体几何失稳,以及顶板-煤柱系统的几何-物理失稳等问题。

本书可供从事地质工程、土木工程、岩土力学的专家、学者以及相关专业的研究生参考使用,亦可作为普通高等院校的教材使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

非线性岩土力学基础/秦四清等著. —北京:地质出版社, 2008. 6

ISBN 978 - 7 - 116 - 05696 - 1

I. 非… II. 秦… III. 非线性力学 - 岩土力学 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 083821 号

---

执行编辑: F 大本

责任编辑: 于春林 白铁

责任校对: 黄亦晔

出版发行: 地质出版社

社址邮编: 北京海淀区学院路 31 号, 100083

咨询电话: (010) 82324508 (邮购部); (010) 82324579 (编辑室)

网 址: <http://www.gph.com.cn>

电子邮箱: [zbs@gph.com.cn](mailto:zbs@gph.com.cn)

传 真: (010) 82310759

印 刷: 北京地大彩印厂

开 本: 787mm × 1092mm<sup>1</sup>/<sub>16</sub>

印 张: 9.75

字 数: 240 千字

印 数: 1—1500 册

版 次: 2008 年 6 月北京第 1 版·第 1 次印刷

定 价: 30.00 元

书 号: ISBN 978 - 7 - 116 - 05696 - 1

---

(如对本书有建议或意见, 敬请致电本社; 如本书有印装问题, 本社负责调换)

# 序

非线性是复杂的自然过程和人为事物的本质性特征之一。它源于系统的物质性和开放性所造成的复杂性，并反映着系统内在的及内外的各种相互作用和总体行为。学界称之为非线性动力系统。

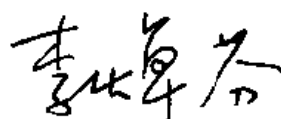
岩土和地质工程系统具有高度的非线性特征，岩土水与工程系统的物质运动和结构演化，以及其变形、破坏、和失稳充分体现了系统动力学过程的复杂性。显然，从系统的非线性入手，进一步探索其某种普适性的内在规律，发展科学合理的、能够反映复杂开放系统由渐变到突变、由连续到不连续、由无序到有序的研究理论和分析方法，将成为重要的发展方向。

岩土和地质工程系统的种种动力过程和非平衡发展，如系统无序—有序转化；渐变—突变转化；系统演化到临界点附近的自组织临界现象及涨落效应对系统的响应；子系统的协同作用；系统的内在确定性变形规律——混沌特征等等，正是非线性动力系统的典型行为。

非线性科学的发展，如耗散结构论、协同学、突变理论、混沌理论、分形理论及重正化群理论等，给岩土和地质工程系统研究中的非线性问题提供了重要的理论基础和科学方法。这些理论是研究非线性性质、非平衡体系的科学，决定了它们应用的普适性和广阔前景。

本书作者之一中国科学院地质与地球物理研究所秦四清研究员长期以来针对复杂的各种岩土体工程问题，用非线性动力系统理论进行深入研究，以期找到其变形破坏的本质和演化规律，探索失稳判据，发展科学的物理预测和预报模型。本书正是他们在中国科学院创新计划中取得的前沿性研究成果，其学术价值突出，工程应用意义显著，对地质工程与岩土力学的学科发展将起到积极的推动作用。

为此，特为其作序，并向同行读者推荐。

 (C. F. Lee)

中国工程院院士

加拿大工程院院士

香港大学常务副校长

2008年3月28日于香港

# 前 言

工程地质与岩土力学的核心是“变形与破坏”、“稳定性评价”、“极限状态与极限平衡”及“预测预报”等问题。如何实现科学合理的岩土体稳定性评价和地质灾害预测预报,是工程地质与岩土工程专家亟待解决的重大问题。

在传统的岩土体稳定性评价中,不少学者用模糊数学、灰色理论、黏弹塑性本构模型、损伤断裂模型、广义内时本构模型等理论与方法评价岩土体稳定性。这些理论与方法或者考虑了岩土体变形的不确定性或随机性,或者根据岩土介质应力应变曲线型式得到的某种简化本构模型描述岩土体变形的某种力学行为。这些理论与方法未能反映岩石变形局部化、从无序到有序、系统演化到临界点附近的自组织临界现象及涨落效应对系统的响应、系统突变等不连续行为以及子系统的协同作用和系统的内在混沌特征等非线性行为和规律。对这些问题,必须进行深入研究,以找到某种普适性的内在规律,建立科学合理的能够反映开放系统由渐变到突变、由连续到不连续、由无序到有序的岩土体稳定性分析理论。

过去的试验研究大多是针对岩土介质在峰值强度前的力学行为,但据我们近些年的研究,岩土体失稳不仅取决于峰值强度前的变形行为,更重要的是取决于其峰值后的力学行为。因此,开展岩土体在不同围压和不同孔隙水压力条件下的全应力应变性能研究,就显得更为重要。

预测岩土体破坏时间的常用方法是经验的或统计的。这些统计预报方法缺乏严格的物理基础,不仅用于预报的参数或指标物理意义不明确,而且预报结果与选用不同蠕变阶段的数据有关,常带有很大的主观随意性。岩土体失稳时间预报研究要取得重大进展,必须从经验或统计预报向物理预报发展。在滑坡预报研究中,滑坡预报常用的位移或位移速率指标与滑坡的发生未必有必然的联系,如在一次大暴雨期间,位移会陡增,位移速率也很大,但斜坡可能呈稳定状态,按位移或位移速率预测可能会得出错误的结论。为此,必须寻找与滑坡前兆突变异常有必然联系的标志和指标。

环境因素如降雨、地震、震动对岩土体失稳有重要影响,受到了很多学者专家的重视,几十年来发表了大量有关论著。以水对滑坡的影响而论,除化学腐蚀作用外,主要有静水压力(浮托力)、动水压力作用以及降低力学强度的作用等。但据我们最新的研究,水还有一种重要的作用,即增大材料均匀性或脆性的作用。岩土体临近失稳时,外部涨落(降雨、地震、爆破震动、大气压力、日月潮引力等)是失稳的重要触发因素,过去的研究对涨落效应大多未涉及,因此,有必要探索涨落因素对失稳的触发机制。

对岩土体稳定性科学评价难点在于岩土体系统的高度非线性。正是由于非线性的存在,才使人们对岩土体变形破坏机理认识模糊,引进的数学、力学理论有时失效,量化描述难以实现。求解非线性问题一般极为困难,非线性问题个性极强,必须具体问题具体分析,但非线性问题在基本面上具有普适性,如地震、滑坡、岩爆等,虽然失稳的表现形

式各异,但都是在外界影响下,介质的物理力学性质发生改变而引起的,其失稳机制并无本质区别。

耗散结构论、协同学、突变理论、混沌理论、分形理论及重正化群理论等非线性科学的发展,给研究地学中的非线性问题提供了理论和方法。这些理论是研究非线性性质、非平衡体系的科学,决定了它们在地学中应用的普适性和广阔前景。地质体中平衡和封闭是相对的,非平衡和开放是绝对的,在自发地质过程的非平衡演变中,可能形成非平衡耗散结构,如地震、滑坡的孕育过程,均是耗散结构的形成过程。

与非线性动力学系统(NDS, nonlinear dynamical systems)理论相联系的概念和数学技术,已广泛应用于包括岩石力学和地质研究的很多方面。NDS理论在岩土力学研究中的应用给我们提供了对岩土体失稳机制深入洞察的机会,在此领域诸多学者已经做出了富有创新意义的研究成果。这些成果虽加深了对岩土体失稳机制的认识,但把岩土体演化过程中的蠕变-突变过程、非线性动力学机制、混沌行为、分岔演化机制与物理预报等有机地结合起来,考虑各种环境因素对岩土体演化过程的影响尚显不足。为此,本书将针对复杂的各种岩土体作用系统,用NDS理论进行深入研究,以找到其本质的失稳判据与演化规律,探索混沌产生的力学机制,发展科学的物理预报模型。

尽管诸多学者对岩土力学的基本问题做了深入研究,取得了丰硕成果,但这些研究仍停留在对岩土体变形与破坏机制认识的初级阶段,诸多问题有待深化。下面我们将通过对几个典型岩土力学基础理论问题的讨论予以阐述。

#### 1. 什么原因使岩土体的演化从量变到质变?

如果岩土体系统中各要素相互作用仅仅是线性的,那么无论它们怎样组合,只会有量的增减,而不可能有质的变化,也即斜坡不会失稳,地震不能发生。对线性系统,任何预测和判断都会准确无误,而失败于预测许多灾难性滑坡和地震的事实说明,岩土体系统的演化行为具有高度非线性,其长期力学行为难以预测。

#### 2. 用牛顿力学研究岩土体特性合适吗?

牛顿的物理学是机械论,它所描述的世界是没有质变的,牛顿力学方程对时间反演 $t \rightarrow -t$ 是不变的,它仅适用于封闭系统,而对具开放性质的岩土体系统并不适用,某些基于牛顿力学的岩土体稳定性评价理论具有相应的局限性。

#### 3. 强度准则用于判断岩土体失稳问题合适吗?

对物理失稳问题,从严格意义上来说,强度准则只适用于具有应变软化属性的单一介质或简单串联系统(压机-岩样系统)。对客观存在的复杂岩土体系统,在应力场作用下,部分岩土体可能达到了峰值强度,而另一部分岩土体可能未达到峰值强度,难以判断在满足何种条件下系统会整体失稳,这说明强度准则只能判断系统的局部破坏。我们的研究表明,对于物理失稳问题,强度准则只是失稳的必要条件之一。

#### 4. 人的预测能力是无限的吗?

研究表明,高度非线性的岩土体系统在演化过程中会出现混沌特征。混沌的出现说明,人的预测能力受可预报时间尺度限制,不是无限的。对具有混沌特征的系统,如果建立力学或统计模型进行预测,不但预测误差会随时间而增大,而且预测的系统行为发展模式可能会脱离系统的本质演化规律。这提示我们,在进行有关流变的数值计算时,预测系统的长期演化行为是不可靠的,需要极其慎重。

基于观测数据的统计预测方法, 缺乏物理依据, 统计预测的效果难以评估, 预测结果难以令人信服。例如, 对一条具有应变软化特征的应力应变曲线, 如果只给出峰值强度前的数据建立预测模型, 那么不管用任何统计方法或所谓的“智能”预测方法(神经网络法、BP 算法等), 都不可能预测出峰值后随应变的增大应力会减小的特征, 不但预测误差会越来越大, 预测的规律与实际情况将截然相反。

#### 5. 刚体极限平衡法的适用性如何?

刚体极限平衡法常用于评价斜坡稳定性或计算挡土墙土压力, 该法采用了滑面介质力学属性为刚塑性的假设, 这是一种假定的理想情况。实际上滑面介质的应力应变属性或为应变软化属性或为应变硬化属性(弹塑性, 含理想弹塑性), 根本不可能具有刚塑性属性, 刚塑性假设纯粹为硬性假设, 与实际情况可能完全不符。换句话说, 该法只适用于滑面为单一介质或在某一蠕滑位移值时同时达到峰值强度的多种介质, 否则抗滑力不能按峰值强度叠加计算。对于实际斜坡系统而言, 滑面可能由具有不同力学属性的多种介质组成, 采用非线性科学理论进行研究显然是很必要的。

#### 6. 为什么滑坡发生时间不一定发生在降雨或地震期间?

如果滑坡系统是线性的或弱非线性的, 则在适当的降雨强度和相当的地震震级作用下, 滑坡发生时间可与之同步; 如果滑坡系统是非线性的, 则滑坡发生时间可能提前或滞后于降雨或地震期间。

非线性科学引入地质学已有近 20 年的历史, 著者在 1993 年曾出版过将非线性科学引入工程地质学的第一部专著——《非线性工程地质学导引》, 接着黄润秋与许强在 1997 年出版了《工程地质广义系统科学分析原理及应用》一书。之后, 著者和其他有兴趣于此领域研究的学者一道, 在此领域做出了富有成效的探索。值得提出的是, 谢和平院士用分形几何理论研究岩石破坏机理取得了许多创新性成果, 其他学者用突变理论、重正化群理论、协同学研究岩石体变形破坏机理也都有新的认识和发现, 但这些研究大多集中于单一岩土介质, 这在实际岩土工程中极为少见, 具有不同力学属性介质的相互作用机理基本上是研究的空白。针对这些问题, 著者在此领域做了一些开拓性的工作, 提出了具有不同力学属性介质相互作用的非线性理论, 这也是本书的核心与重点。其理论的本质可概括为: ①单一介质可能有不同的应力应变属性, 如弹脆性、应变软化、应变硬化属性等, 不同介质的应力应变属性不同, 这取决于介质的赋存环境、应力状态与物理状态; ②不同力学属性介质的相互作用具有协同效应、突变效应与混沌效应, 用强度理论难以评价系统是否整体上达到了极限状态或失稳状态。我们的研究表明, 对单一岩土介质, 强度理论基本有效; 对多种具有不同力学属性介质组成的系统, 强度理论只适用于判断系统局部破坏, 不再适用于判断系统整体上是否达到了极限状态或失稳状态。多数情况下, 强度准则只是失稳的必要条件之一; ③系统是否达到极限状态或发生失稳与系统的刚度比和介质的均匀性有极大相关性。

本书分四篇十章, 第一篇是非线性岩土力学的理论基础, 包括第一章至第四章; 第二篇是土体剪切变形过程的极限状态分析理论, 包括第五章和第六章; 第三篇是岩体物理失稳非线性分析理论, 包括第七章和第八章; 第四篇是岩体几何失稳与几何-物理失稳非线性分析方法, 包括第九章和第十章。现简介如下。

第一章, 对非线性科学的概念、方法及解决问题的程序做了介绍, 并对其在工程地质



和岩土力学中的研究与应用进展做了简述。

第二章,总结了岩土介质应力应变曲线模式与破坏性质的关系,指出断续岩石节理(岩桥)的破坏和剪切行为与过去认为的简单弹脆性破坏不同,结构性土体用弹塑性本构关系不能很好描述,必须考虑损伤行为。对具有应变软化属性的单一介质,强度理论可用于确定其极限状态,否则强度理论不再适用。分析了极限平衡法的缺陷,对比了强度准则与刚度判据的适用范围。提出了具有应变软化属性介质与具有应变硬化属性介质协同作用的岩土介质剪切极限状态分析理论,这是本书的重要贡献之一,该理论可作为第三章、第六章、第七章、第八章、第十章的理论基础。

第三章,介绍了协同学理论在岩石力学中应用的一个实例。本章首先在同时考虑岩石的力学参量和热学参量条件下,构造系统的动力学方程组;接着应用协同学的绝热消去技术建立序参量方程;最后对序参量方程的稳定性与混沌性作了分析。

第四章,用耗散结构理论定性讨论了岩体演化过程中耗散结构形成的条件和机制,分析了滑坡孕育演化的自组织过程;根据 NDS 吸引子概念,建立了考虑混沌特性的滑坡可预报时间尺度的确定方法,并对滑坡长期预报、中期预报与临滑预报的可行性进行了分析;建立了滑坡演化的非线性动力学模型,模型参数可根据观测数据和著者提出的改进反演迭代算法确定,模型的可靠性通过实例分析得到了验证。

第五章,可看作第二章的一个应用实例,本章把墙后土体看作由两种具有不同应力应变属性的介质组成,一种具有应变硬化或弹塑性(含理想弹塑性)性质,另一种具有应变软化属性,研究两种不同属性介质相互作用产生的土压力。研究给出了产生主动土压力的必要条件和充分条件,并结合实测资料验证了理论模型的可靠性,提出了与前人研究思路和方法完全不同的新的非线性土压力理论,深化了对土压力有关问题的认识。

第六章,可看作第二章的一个应用实例,本章把桩周土体看作由两种具有不同应力应变属性的介质组成,研究刚性抗拔桩产生极限抗拔力的必要条件和充分条件,提出了极限承载力非线性分析理论。

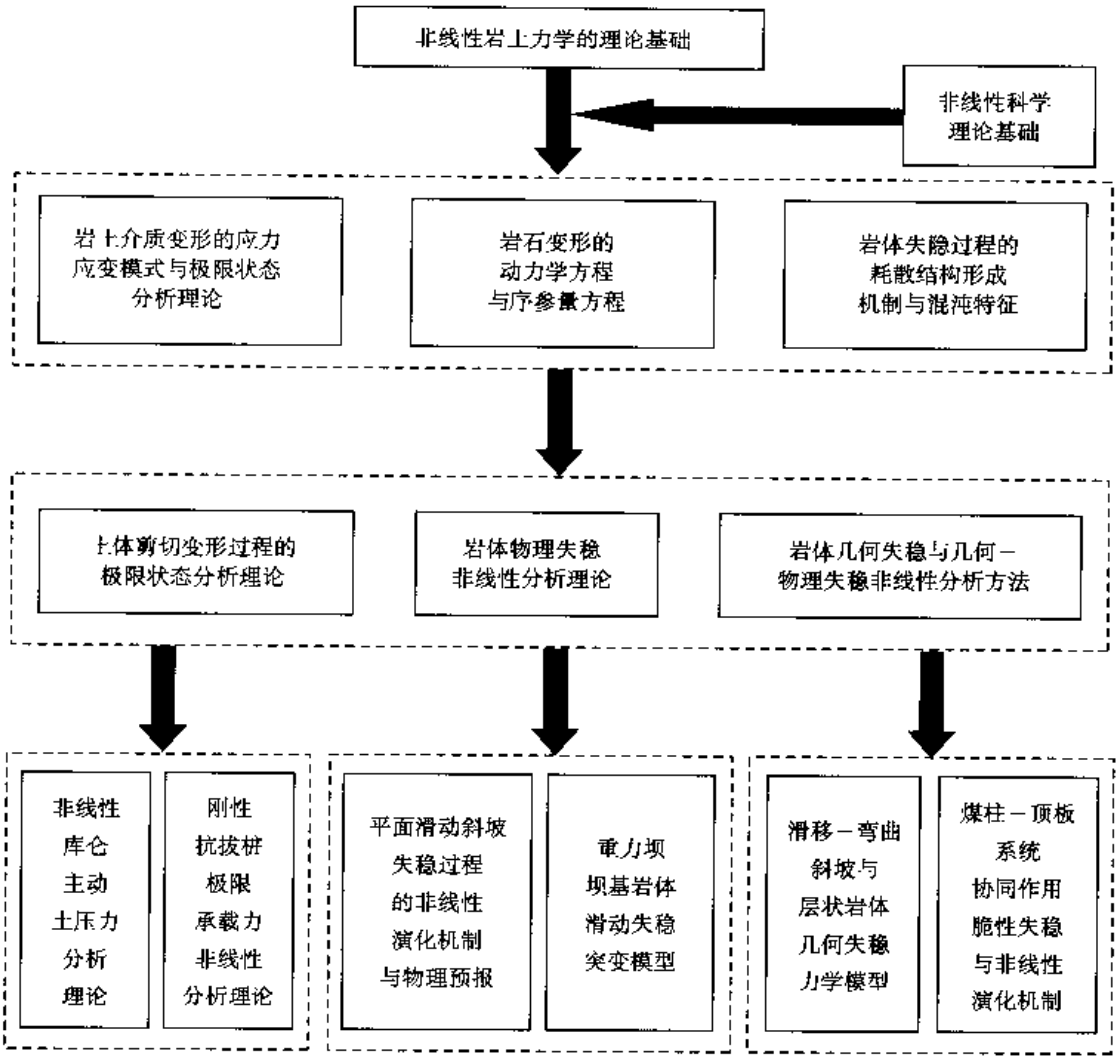
第七章,可看作第二章理论的应用。该章以平面滑动斜坡为例,考虑滑动面介质的不同力学属性,用突变理论研究它的失稳机制;在此基础上,考虑滑面介质的蠕变、加速度与环境因素特性,建立非线性动力学模型探索滑坡物理预报方法及混沌产生的条件和判据。

第八章,可视为第二章理论的应用。该章应用突变理论方法,研究了重力坝沿软弱结构面滑动的失稳模型与突变机制。软弱结构面内含岩桥,岩桥介质具有复杂弹脆性属性,软弱结构面内除岩桥外的介质具有应变软化属性。当具有不同力学属性的介质相互作用时,系统演化将表现出强烈的非线性行为,其失稳模式和判据与过去的认识有很大不同。

第九章,主要研究岩体几何失稳问题。对滑移-弯曲斜坡提出了一个尖点突变模型,用它研究了斜坡失稳机制并进行了实例分析。参照对滑移-弯曲斜坡失稳的研究方法,研究了近水平及陡立岩层的几何失稳力学模型,给出了失稳判据,并结合实例进行了验证。

第十章,主要研究岩体几何-物理失稳问题。用突变理论对坚硬顶板和底板下,顶板-煤柱系统的失稳及其演化的非线性动力学与声发射机制,进行了系统分析。把顶板视为弹性梁,煤柱的本构关系用 Weibull 分布模型描述,研究了失稳的充要力学条件准则、突跳释能机制、失稳演化过程与蠕变三阶段的关系、系统演化的非线性动力学模型及失稳过程

的声发射(AE)物理模型与特征,对失稳机制与宏观破坏物理现象有了更深入的理解。  
本书的研究思路与技术路线框图如下:



研究思路与技术路线框图

本书是第一作者近15年来在非线性岩土力学方面研究成果的总结,是《非线性工程地质学》一书的改进与提高版本。在成书的过程中也参阅、吸纳了某些学者的研究成果。秦四清研究员撰写了前言、第二章—第五章、第七章—第十章,孙强博士撰写了第一章和第六章,王思敬院士参与了有关问题的讨论和指导,审阅了全文并提出了宝贵的修改意见。本书所涉及的问题探索性较强,难免有错误之处,衷心希望读者批评指正。

衷心感谢王思敬院士、张倬元教授、伍法权研究员对地质工程和岩土力学中非线性研究的支持以及对第一作者的鼓励与帮助,特别感谢香港大学李焯芬院士为本书作序,感谢中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-113)和中国科学院工程地质力学重点实验室在经费方面的支持。

# 目 录

## 前 言

### 第一篇 非线性岩土力学的理论基础

|                                       |      |
|---------------------------------------|------|
| 第一章 岩土体演化行为分析的非线性科学理论基础 .....         | (1)  |
| 第一节 非线性系统及其数学基础 .....                 | (1)  |
| 第二节 分岔理论及其应用 .....                    | (5)  |
| 第三节 非线性科学理论简介 .....                   | (8)  |
| 第四节 非线性科学理论的研究对象 .....                | (21) |
| 第五节 岩土体演化行为的非线性研究进展与前景 .....          | (21) |
| 参考文献 .....                            | (26) |
| 第二章 岩土介质变形的应力应变模式与极限状态分析理论 .....      | (28) |
| 第一节 岩土介质应力应变曲线模式 .....                | (28) |
| 第二节 断续岩石节理(岩桥)的破坏与剪切行为 .....          | (29) |
| 第三节 结构性土体的弹塑性损伤本构模型 .....             | (31) |
| 第四节 岩土介质变形破坏的极限状态 .....               | (32) |
| 第五节 刚体极限平衡方法、强度准则与刚度判据 .....          | (33) |
| 第六节 应变软化介质的 Weibull 本构模型 .....        | (33) |
| 第七节 岩土介质剪切变形过程的非线性力学模型与极限状态分析理论 ..... | (34) |
| 参考文献 .....                            | (39) |
| 第三章 岩石变形的动力学方程与序参量方程 .....            | (40) |
| 第一节 引言 .....                          | (40) |
| 第二节 岩石变形的动力学方程 .....                  | (41) |
| 第三节 序参量方程 .....                       | (43) |
| 第四节 序参量方程的稳定性分析与混沌态判据 .....           | (44) |
| 第五节 对序参量方程的讨论 .....                   | (45) |
| 参考文献 .....                            | (47) |
| 第四章 岩体失稳过程的耗散结构形成机制与混沌特征 .....        | (48) |
| 第一节 引言 .....                          | (48) |
| 第二节 岩体变形演化过程中耗散结构形成的条件 .....          | (49) |
| 第三节 岩体失稳过程中耗散结构的形成机制 .....            | (52) |
| 第四节 滑坡孕育演化的自组织过程 .....                | (54) |
| 第五节 系统运动的混沌性与滑坡可预报性 .....             | (55) |
| 第六节 滑坡演化的非线性动力学模型 .....               | (61) |
| 参考文献 .....                            | (68) |

### 第二篇 土体剪切变形过程的极限状态分析理论

|                          |      |
|--------------------------|------|
| 第五章 非线性库仑主动土压力分析理论 ..... | (70) |
|--------------------------|------|

|                                  |                                       |              |
|----------------------------------|---------------------------------------|--------------|
| 第一节                              | 引言 .....                              | (70)         |
| 第二节                              | 基于库仑主动土压力的非线性分析理论 .....               | (71)         |
| 第三节                              | 结论 .....                              | (79)         |
| 参考文献                             | .....                                 | (79)         |
| <b>第六章</b>                       | <b>刚性抗拔桩的极限承载力非线性分析理论 .....</b>       | <b>(81)</b>  |
| 第一节                              | 引言 .....                              | (81)         |
| 第二节                              | 确定抗拔桩极限承载力的非线性分析理论 .....              | (82)         |
| 第三节                              | 结论 .....                              | (88)         |
| 参考文献                             | .....                                 | (88)         |
| <b>第三篇 岩体物理失稳非线性分析理论</b>         |                                       |              |
| <b>第七章</b>                       | <b>平面滑动斜坡失稳过程的非线性演化机制与物理预报 .....</b>  | <b>(89)</b>  |
| 第一节                              | 引言 .....                              | (89)         |
| 第二节                              | 斜坡平面滑动失稳的尖点突变模型 .....                 | (90)         |
| 第三节                              | 考虑蠕变特性的斜坡演化非线性动力学模型 .....             | (98)         |
| 第四节                              | 简化的物理预报模型 .....                       | (101)        |
| 第五节                              | 考虑滑动加速度及环境影响的斜坡演化非线性动力学模型 .....       | (104)        |
| 第六节                              | 结论 .....                              | (109)        |
| 参考文献                             | .....                                 | (111)        |
| <b>第八章</b>                       | <b>重力坝坝基岩体滑动失稳的突变模型 .....</b>         | <b>(113)</b> |
| 第一节                              | 引言 .....                              | (113)        |
| 第二节                              | 坝基沿软弱结构面滑动的力学模型 .....                 | (113)        |
| 第三节                              | 坝基沿结构面滑动失稳的尖点突变模型 .....               | (115)        |
| 第四节                              | 库水位涨落及工程处理措施对滑动失稳的影响 .....            | (116)        |
| 参考文献                             | .....                                 | (117)        |
| <b>第四篇 岩体几何失稳与几何-物理失稳非线性分析方法</b> |                                       |              |
| <b>第九章</b>                       | <b>滑移-弯曲斜坡与层状岩体几何失稳力学模型 .....</b>     | <b>(119)</b> |
| 第一节                              | 引言 .....                              | (119)        |
| 第二节                              | 滑移-弯曲斜坡失稳尖点突变模型 .....                 | (121)        |
| 第三节                              | 滑移-弯曲斜坡失稳实例研究 .....                   | (124)        |
| 第四节                              | 层状岩体失稳的尖点突变模型 .....                   | (125)        |
| 第五节                              | 结论 .....                              | (128)        |
| 参考文献                             | .....                                 | (129)        |
| <b>第十章</b>                       | <b>煤柱-顶板系统协同作用的脆性失稳与非线性演化机制 .....</b> | <b>(130)</b> |
| 第一节                              | 引言 .....                              | (130)        |
| 第二节                              | 煤柱-顶板系统协同作用的尖点突变模型与失稳机制 .....         | (131)        |
| 第三节                              | 系统演化的非线性动力学模型 .....                   | (137)        |
| 第四节                              | 系统演化的声发射非线性动力学模型与失稳过程的声发射特征 .....     | (139)        |
| 第五节                              | 结论 .....                              | (145)        |
| 参考文献                             | .....                                 | (145)        |

# 第一篇 非线性岩土力学的理论基础

本篇在介绍非线性科学基本理论的基础上,分别给出了协同学、耗散结构理论、混沌动力学在岩土力学分析中的解题方法与应用实例,提出了具有不同应力应变属性介质协同作用的极限状态分析非线性理论。

## 第一章 岩土体演化行为分析的非线性科学理论基础

非线性科学是研究系统非线性特征的一门综合性学科,主要包括耗散结构理论、突变理论、协同学、分形几何学、混沌动力学等分支学科。非线性科学几乎涉及了自然科学和社会科学的各个领域,并正在改变人们对现实世界的传统看法。由非线性科学所引起的对确定论和随机论、有序与无序、偶然性与必然性等范畴和概念的重新认识,已经形成了一种新的自然观,将深刻地影响人类的思维方式,并涉及现代科学逻辑体现的根本性问题。迄今为止,非线性科学已经在自然科学的诸多领域得到了应用和发展<sup>[1-30]</sup>。非线性科学的诞生给系统科学注入了新的活力,同时也为岩土工程的研究吹来了非线性时代的春风。对岩土非线性力学行为的系统研究从《非线性工程地质学导引》一书的出版为标志性开端,已经有将近15年的发展历程。其间,随着岩土工程理论研究、实验手段与实测资料的不断积累,特别是新的信息测试、监测技术在岩土工程中的不断应用和发展,为研究岩土的 nonlinear 力学行为提供了有力的基础条件,使得岩土非线性研究有了长足的进步,非线性科学的主要理论“新三论”(耗散结构理论、协同学、突变理论)、混沌动力学、分形理论<sup>[1-4]</sup>等在岩土工程的研究与应用中扮演着愈发重要的角色。

岩土工程所涉及的研究对象不仅仅是一个开放、复杂的巨系统,同时又是一个非线性复合系统,因此从非线性角度认识岩土体系统的演变规律具有重要的现实意义和科学意义。本书阐述了非线性科学的主要思想,总结了近年来我们在非线性岩土力学方面的研究成果。为便于理解本书以后各章的内容,第一章将对有关非线性科学的主要思想和研究方法进行介绍。

### 第一节 非线性系统及其数学基础

#### 一、线性和非线性的数学描述<sup>[5]</sup>

如果描述系统状态的物理量在空间的分布是均匀的,即有:

$$\nabla x_i = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_i, x_j) \quad (1-2)$$

式中,  $\nabla$  为梯度算子。如果  $f$  是物理量  $x_i$  的线性函数, 那么系统方程(1-2)就是一个线性系统。如果  $f$  是非线性函数, 则方程(1-2)表示的是一个非线性系统。

如果描述系统状态的物理量不仅是时间的函数, 而且还是空间的函数, 即有:

$$\nabla x_i \neq 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + v \cdot \nabla x_i = f(x_i, x_j) \quad (1-4)$$

如果广义速度  $v$  是不均匀的, 那么  $v \cdot \nabla x_i$  为非线性项, 因此, 不管  $f$  是否为线性函数, 方程(1-2)表示的是一个非线性系统。

线性系统具有以下显著特点:

1) 均匀性(空间分布均匀、相互作用等权重);

2) 独立性(代数叠加律);

3) 可逆性: 所谓的可逆性指的是当  $t \rightarrow -t$ , 物理规律或结果仅符号改变而形式、分布不变, 即  $f(t) = -f(-t)$ 。

非线性系统具有以下显著特点:

1) 非均匀(空间分布、相互作用的方式、效应、结果随试件、地点、条件而变);

2) 相干性(各主要要素不具有独立性, 遵守矢量叠加原理);

3) 不可逆性(空间不均匀所致, 各要素的作用和重要性不同), 如生物进化、天气演变、地球自转等演化行为的不可逆性;

4) 存在支配与从属、控制与反馈、策动与响应等对立矛盾的两方面。

## 二、确定性论、概率论与混沌<sup>[5]</sup>

牛顿(Newton)和拉普拉斯(Laplace)都曾断言, 只要建立起系统的动力学方程, 就可以根据系统的初始条件和边界条件准确地确定系统任意时刻以后的运动。在牛顿所创建的经典力学体系里, 科学家相信, 任意一个确定性的系统在确定性的激励下, 其响应必然也是确定的。也就是说, 确定性遵循的是  $\epsilon - \delta$  语言, 即动力系统小量的初始误差  $\epsilon$  所产生的结果误差也是一小量  $\delta$ , 此外, 确定性论还遵循因果一一对应关系, 一个初始条件或一组边界条件唯一地对应于一个(组)解。由于确定性论的典型代表——牛顿力学的巨大成功, 几百年来, 人们理所当然地认为世界是精确可知的, 当时的事实的确如此。科学家利用牛顿三定律及其在流体中的应用公式 N-S 方程, 精确地计算出系统轨线和未来的状态, 从有形的轨迹到无形的行为, 从行星、彗星的发现到航海、气象、水文、地震的预报, 无一不是确定性的成果。事实上, 确定性论也是可知论的科学依据。

与确定性论平行发展的是概率论, 即客观世界所遵循的因果关系是一与多的对应关系。在概率论看来, 世界是不可知的, 所以概率论是不可知论的基础。由于随机因素的存在, 系统遵守的是大数定律, 即系统的统计行为是可知的, 而具体的某一事件或某一行为是不可准确预测的。

很显然, 确定性论和概率论二者是对立的, 互不相通的。由于两者观点的不同, 确定性论和概率论分别派生出了动力建模和统计建模。然而, 无论是动力建模还是统计建模,

误差总是客观存在的。过去一般认为导致预测误差的主要原因有三个方面：客观模式与主观模式的误差、计算与观察的误差以及由于资料或参数的离散而产生的误差。

如图 1-1 所示，某物理场的空间结果分为 I、II、III、IV 四个区域。这四个区域的结构彼此存在着本质上的区别，如不同性质的吸引子或同一个吸引子的不同特性区域。假设系统的初始状态是  $A$ ，观测误差是  $\pm \varepsilon$ ，规定的允许预报误差为  $\pm \delta$ 。由于客观存在的状态变量的离散化，我们无法确定、区别彼此很近的一些态，如  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  究竟哪个态是真实的初始态。因此，我们亦无法知道演化时间  $t$  后，它们所演化出的彼此不同的状态  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ 、 $D'$ 、 $E'$  中哪个是未来的真实状况。即我们的预报模式可能是  $B'$ 、 $C'$ ，也可能是  $D'$ 。如果我们预报的是  $B'$ ，由于  $\overline{A'B'} \leq \varepsilon$ ，预报是精确的。如果我们预报的是  $D'$ ，由于  $\overline{A'D'} \leq \delta$ ，预报是准确的，即系统仍是可预报的。如果我们预报的是  $C'$  或  $E'$ ，由于  $C'$  或  $E'$  与  $A'$  的物理性质有本质的差异，我们的预报是失败的。

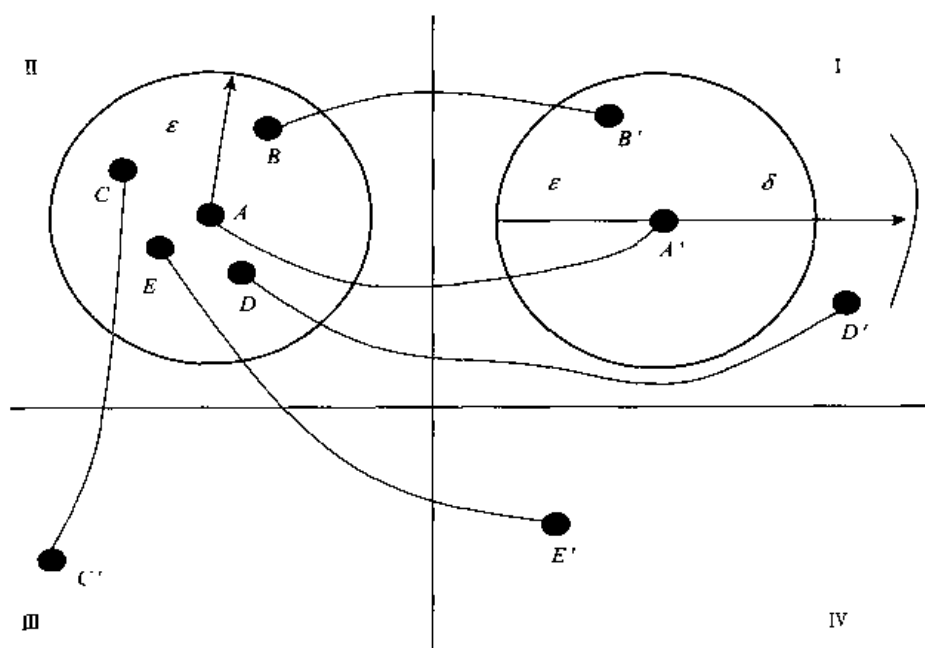


图 1-1 资料离散而产生的误差<sup>[5]</sup>

随着对客观事物认识的提高，客观模式与主观模式的误差可以逐渐减少。随着计算和观察精度的提高，由计算和观察所产生的误差也可以逐渐减少。如果我们能消除由于资料或参数的离散而产生的误差，那么我们就可以通过建模而准确地描写任意客观系统。但是林振山<sup>[5]</sup>认为资料或参数的离散而产生的误差将是客观和永恒的，无论人类如何提高认知能力和水平都将无法消除该误差。

随着计算机技术的发展，人们得以进行大规模的数值模拟和非线性微分动力系统的研究。大量研究结果表明：由于资料或参数的离散而产生的预报误差总是无法消除的。不仅如此，一些看似非常简单的二维非自治确定性非线性动力系统和三维自治确定性非线性动力系统存在着不确定解。1963 年，气象学家 Lorenz (《确定性非周期性》) 试图用一简单的三维自治非线性动力系统来研究大气对流的稳定性，但研究结果却让数学家百思不得其解：确定性非线性动力系统存在着不确定性。此外，计算机模拟试验发现，输入参数的稍

微变化将导致结果的巨大变化,一切变化好像都是出人意料的。Ruelle 和 Tankens 提出了奇怪吸引子的概念(1971,《论湍流的本质》); Li 和 Yorke 首先使用了混沌这个术语(1975,《周期3则混沌》); May 发表了关于生物学的生态方程(1976,《表现非常复杂的动力学的简单数学模型》); Feigenbaum 对 May 的虫口模型进行计算机数值实验时,发现了称之为费根鲍姆(Feigenbaum)常数的两个常数(1978); Mandelbrot 在 1980 年发现了以他的名字命名的 Mandelbrot 集合。在一大批杰出的数学家和物理学家的深入研究下,人们发现了划时代的混沌现象。即 3 个变量以上的自治动力系统或 2 个变量以上的自治动力系统或 1 个变量以上的延时动力系统可以出现不确定行为。我们把确定性非线性耗散动力系统的不确定行为(即混沌)称为类随机行为或动力系统的内在随机或简称为动力随机。这种动力随机(混沌)与传统的随机现象的主要区别在于,混沌在高层次是有序、有结构和自相似的。

混沌系统的最大特点就是对初值的极其敏感性,如著名的“蝴蝶效应”指出:巴西的一只蝴蝶拍拍翅膀,就可能导致美国得克萨斯州的一场龙卷风。混沌现象的发现说明了确定性动力系统的行为不仅仅是定常、周期和准周期的,而更普遍的则是无序的混沌。混沌架起了从确定性论到概率论的桥梁。混沌使我们认识客观世界由单一到多样,由简单到复杂,由和谐到奇异,由静态美到动态美。混沌是令人振奋的,它开启了简化复杂现象的可能性。

### 三、相空间和定态<sup>[5]</sup>

所谓的相空间指的是用状态变量  $\{x_i\}$ ,  $(i=1, 2, \dots, n)$  支撑起来的抽象的物理空间,也称为 Hilbert 空间。它不同于真实的三维位置空间  $r$  以及真实的四维时间-空间  $t-r$ , 主要差别在于相空间是想象和抽象的,是非现实的,它的维数可以是有限的  $n$  维(即所有研究的对象有  $n$  个变量)或无穷维。此外,相空间的坐标还可以代表任意一个状态变量或状态参量的某个分量。

由任意两个状态变量支撑起来的抽象的物理空间(抽象平面)叫做相平面。对于任意一个二阶非线性微分方程:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (1-5)$$

式中,  $f(x, \dot{x})$  是作用在单位质量点上的力;  $\dot{x}$  和  $\ddot{x}$  分别表示质点的速度与加速度。质点的位置  $x$  和速度  $\dot{x}$  刻画了该系统在任一时刻的状态,称为相,平面  $(x, \dot{x})$  称作相平面。

为方便起见,令  $y = \dot{x}$ , 那么方程(1-5)可写为普适的二元(以后称为维,广义维)动力方程组:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases} \quad (1-6)$$

方程(1-6)更为普遍的形式是二维的自治动力系统,即

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1-7)$$



所谓的自治动力系统就是方程右边的函数  $f(x, y)$  与  $g(x, y)$  都不含时间自变量  $t$ 。反之, 如果  $f=f(x, y, t)$ ,  $g=g(x, y, t)$ , 则称为非自治动力系统。

在  $x-y$  相平面里, 向量场为

$$w(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j = \dot{x}i + \dot{y}j \quad (1-8)$$

上式直观地描述了系统的演化行为。该向量场在相空间里表现为一簇带箭头方向的曲线, 即相轨道, 或称相速度流 ( $w = \dot{x}i + \dot{y}j$ )。每一条相轨道都是由无穷多的相点所组成的。由于运动是有方向的, 所以相点不仅代表系统每时刻的相位置, 还表示了相流的方向(相轨道的切线方向)。

在相空间(平面)里, 系统的状态由其位置和运动方向唯一确定, 因此, 相空间里的相点与系统的状态是唯一对应的。一个相点对应于一个状态, 反过来, 一个状态可以唯一地用一个相点来表示。

定态指的是在一定参数下不随时间变化的态, 也就是在相空间里静止不动的点, 即满足以下条件的点:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0 = g(x, y) \end{cases} \quad (1-9)$$

由于方程(1-9)是一代数方程组, 容易求出其解:  $x_{0i}, y_{0i}, (i=1, 2, \dots, n)$ 。

从某种意义上说, 知道了系统定态的个数和定态的各自特性, 就基本知道了系统的演化特性和物理场的空间分布(拓扑结构)。而求定态的过程则是将一个复杂甚至无法求解析解的微分方程组转化为简单、可解的代数方程组。这在数理分析史上是一个飞跃。

定态也称为平衡态(在某些文献中, 平衡态是指稳定的定态), 定态的稳定与否, 分别用稳定的态和不稳定的态表示。

在数学上, 还把满足方程(1-9)解的态叫做奇点。奇点的“奇”就是奇怪和不真实。因为方程(1-9)的左边为一组导数等于零的方程, 导数等于零就意味着没有确定的切线方向, 所以从数学的角度来看, 所有满足方程(1-9)解的点(即定态)可以有任意的切线方向。换句话说, 在任意一个态上可以存在无穷多的轨线, 这显然违背了状态与相点位唯一对应的唯一性定理。所以, 定态是不真实的态, 是“奇怪”的。事实上, 定态(奇点)表示的是当  $t \rightarrow \infty$  时系统达到的可能的态(一个或多个)。  $t \rightarrow \infty$  显然不是真实的, 而是一种理想的极限。

## 第二节 分岔理论及其应用

分岔理论<sup>[5,6,24]</sup>是耗散结构理论、突变理论和混沌理论的基础。所有的耗散结构、突变和混沌现象都必须经过分岔。但分岔未必能出现耗散结构和混沌现象。所以, 分岔是耗散结构、突变和混沌产生的必要条件, 但不是充分条件。

### 一、吸引子与分岔

吸引子就是稳定的定态, 如稳定的结点、稳定的焦点。而不稳定的定态则称为排斥

子, 如不稳定的结点、不稳定的鞍点、不稳定的焦点等。非线性动力系统与线性系统的最大区别之一就是复杂性。而复杂性的表现就是存在有多个吸引子和多个排斥子, 而不只是一个平衡态。所以, 线性系统只有一个吸引子, 而非线性系统则在大多数情况下存在多个吸引子。因此, 多个吸引子的存在就是分岔的前提。

下面通过一个例子说明分岔产生的条件, 如对方程(1-10)所示的一维非线性系统:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + px \quad (p > 0) \quad (1-10)$$

系统存在 3 个平衡态:

$$\begin{cases} A_{01}: (x_{01} = 0) \\ A_{02}: (x_{02} = \sqrt{p}) \\ A_{03}: (x_{03} = -\sqrt{p}) \end{cases} \quad (1-11)$$

其特征值为:

$$\omega = -3x_0^2 + p \quad (1-12)$$

根据式(1-12)可知,  $A_{01}$  是不稳定的结点,  $A_{02}$ 、 $A_{03}$  都是稳定的结点。所以系统存在一个排斥子和两个吸引子, 如图 1-2 所示。

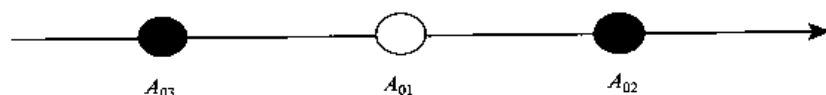


图 1-2 两个吸引子和一个排斥子共存

分岔, 指的是由于参数的变化, 系统因原平衡态失稳而进入新的平衡态的过程。例如对式(1-10), 当  $p \leq 0$ , 系统只有一个平衡态  $A_{01}$ , 当参数由  $p \leq 0$  变为  $p > 0$  时系统存在三个平衡态:  $A_{01}: (x_{01} = 0)$ 、 $A_{02}: (x_{02} = \sqrt{p})$ 、 $A_{03}: DK (x_{03} = -\sqrt{p})$ 。所以,  $p = 0$  为一分岔点。当参数由  $p \leq 0$  变为  $p > 0$  时, 系统将从失稳的平衡态  $A_{01}$  分出两个新的平衡态  $A_{02}$  和  $A_{03}$ 。

分岔点意味着原来的平衡态失稳而分出新的平衡态, 所以, 分岔点必定是奇点(平衡态)。因此, 分岔点的必要条件是:

一维(元):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) = 0 \quad (1-13)$$

二维(元):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

式中,  $\lambda$  代表某一控制参数。分岔意味着从一个态分岔出至少两个态或两个态分支, 分岔点是若干奇点的一个, 故要满足临界定态条件, 即  $\partial f / \partial x = 0$ 。从稳定性分析理论可知, 对于动力系统  $dx/dt = f(x, \lambda)$ , 如果  $f = 0$  是奇点条件, 那么  $\omega = \partial f / \partial x$  则是奇点性质判别条件。

当  $\omega = \partial f / \partial x < 0$  时, 平衡态是稳定的; 当  $\omega = \partial f / \partial x > 0$  时, 平衡态是不稳定的; 当  $\omega$

$= \partial f / \partial x = 0$  时, 平衡态由稳定的变为不稳定的。由此可知:

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1-15)$$

是一维动力系统出现分岔的充分条件(临界定态条件)。对于二维情况, 可由特征根方程  $\omega$  判断, 如果两个根的实部在某参数值  $r = r_m$  的一侧为负, 在另一侧为正, 而在中间恰好为零, 即  $\omega(r_m) = 0$ , 则在  $r = r_m$  处有分支存在。所以, 分岔的充分条件为:

$$\omega(r_m) = 0 \quad \text{或} \quad \text{Re}\omega(r_m) = 0 \quad (1-16)$$

归纳起来, 分岔点的充要条件是:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) = 0 \quad \text{和} \quad \omega = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (\text{一维}) \quad (1-17)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \text{Re}\omega(r_m) = 0 \quad (\text{二维}) \quad (1-18)$$

## 二、分岔类型

根据 Jacobi 矩阵特征值的取值情况, 可以将分岔分为鞍-结分岔、叉型分岔和 Hopf (霍夫) 分岔。

### 1. 鞍-结分岔

鞍-结分岔是指由鞍点分岔出结点, 或由结点分岔出鞍点。由于结点的 Jacobi 矩阵的特征值是实数 ( $\text{Im}\omega = 0$ ), 而鞍点的实部  $\text{Re}\omega$  是一正一负。所以鞍-结分岔的 Jacobi 矩阵的特征值是沿复平面 ( $\text{Re}\omega, \text{Im}\omega$ ) 的实轴两边穿过虚轴, 如图 1-3 所示。

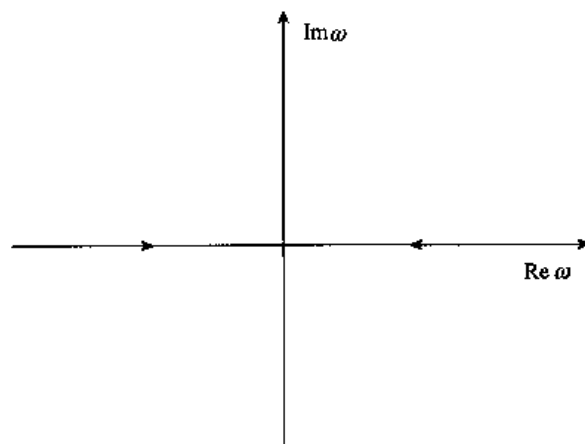


图 1-3 鞍-结分岔

### 2. 叉型分岔

叉型分岔指的是 Jacobi 矩阵的特征值沿复平面 ( $\text{Re}\omega, \text{Im}\omega$ ) 的实轴穿过虚轴, 如图 1-4 所示。

### 3. Hopf (霍夫) 分岔

Hopf 分岔是指 Jacobi 矩阵的特征值沿复平面 ( $\text{Re}\omega, \text{Im}\omega$ ) 的上方或下方穿过虚轴的一

类分岔。主要是指从焦点(参考态)分出新支,尤其是分出极限环的过程。关于极限环和Hopf(霍夫)分岔的基本理论在这里不再详细叙述,读者可查阅相关文献。

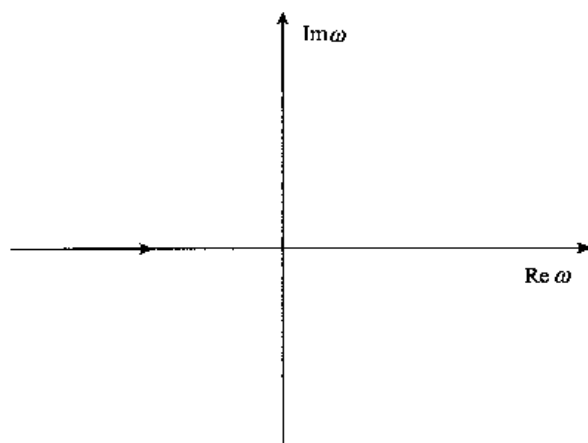


图 1-4 叉型分岔

### 第三节 非线性科学理论简介

#### 一、耗散结构理论<sup>[1~2,21~22]</sup>

耗散结构理论是以比利时化学物理学家普利高津(Prigogine)为首的布鲁塞尔学派经过长达 20 年的研究提出的一种广义热力学理论,并在多个领域得到广泛应用。

耗散结构理论是在深入分析自然界中的两对矛盾和时间不可逆性的基础上产生的。两对矛盾是指牛顿力学与热力学之间的矛盾以及热力学“退化论”与达尔文的“进化论”之间的矛盾。在牛顿经典力学中,时间是可逆的,事物按某一既定规律发展演化,从现在可以完全推知将来,也可从现在推演过去。牛顿力学所描述的图像是一幅静止的、不变的物理图像。热力学虽然描述的是一个演化的、变动的物理图像,时间是不可逆的,但他认为事物的演化总是朝着平衡态方向,即朝着均匀、单一、简单的方向演化,即有序向无序演化,这实质上是一种退化。达尔文的“进化论”则讨论了与热力学完全不同的另一类演化,其演化方是朝着复杂、非平衡进行的,是一种“进化”,当然时间更是不可逆的。对于同一世界会出现这几种互不相容的演化图像,普利高津(Prigogine)等人的研究结果表明,其关键在于系统本身的性质和系统所处的状态不同。系统有孤立系统、封闭系统和开放系统之分。孤立系统是指与外界既无物质交换又无能量交换的系统;封闭系统是指与外界仅有能量交换而无物质交换的系统;开放系统则与外界既存在着物质交换又存在着能量交换。系统性质的不同,决定了其热力学第二定律的表达式也不同。对于不同性质的系统,系统熵变的表达式分别为:

孤立系统:

$$ds \geq 0 \quad (1-19)$$

封闭系统:

$$ds \geq \frac{dQ}{T} \quad (1-20)$$

开放系统:

$$ds = d_e s + d_i s \quad (1-21)$$

式(1-19)~(1-21)中,  $ds$  为系统的熵变;  $Q$  为热量;  $T$  为温度。 $d_e s$  是由于系统与外界交换物质和能量而引起的熵变, 称为熵交换,  $d_e s$  可正、可负或为零。 $d_i s$  是系统内部各种可逆过程产生的熵, 称为熵产生。因为熵只能产生不能消灭, 所以熵产生具有非负性。式(1-21)表明, 在开放系统中, 若  $d_e s < 0$ , 同时  $|d_e s| > d_i s$ , 则有:

$$ds = d_e s + d_i s < 0 \quad (1-22)$$

式(1-22)与式(1-19)所表达的熵增加原理完全相反。也即若在开放系统中, 由于与外界进行物质和能量交换而产生了负熵流  $d_e s$ , 并大于系统内自发过程引起的熵产生时, 整个系统的熵向减小的方向发展, 于是系统便可能产生与孤立系统完全相反的演化图像, 由无序向有序演化, 产生耗散结构。

系统开放仅是系统“进化”的必要条件, 并不是充要条件。开放系统是否能产生有序结构, 还与系统所处的演化状态有关。系统按状态可分为平衡态和非平衡态。平衡态是指在没有任何外界影响下, 系统内部各部分长时间不发生任何变化的状态。在非平衡态中还经常用到非平衡定态的概念, 但平衡态与非平衡定态有着本质的区别, 平衡态不存在任何流和梯度, 而非平衡定态存在着稳恒的流和梯度, 即通常所说的动态平衡。

在耗散结构理论中, 与热力学的熵增加原理相对应, 有一个最小熵产生原理。其内容为: 只要非平衡线性区, 在稳恒的外界条件下, 系统定态的局域熵产生一定比非定态的小。一个耗散结构的形成和维持至少需要以下条件:

1) 系统必须是开放系统, 孤立系统和封闭系统都不可能产生耗散结构, 只有开放系统才有可能引入负熵流, 也才具备产生耗散结构的必要条件。

2) 系统必须处于远离平衡的非线性区, 在平衡态或近平衡态, 大量的实验和理论研究都证明其不可能发生质的突变从无序走向有序, 也不可能从一种有序走向新的更高级的有序。

3) 系统中必须有非线性动力学过程, 如正负反馈机制等。这种非线性相互作用, 能够使系统内的各要素之间产生协调动作和相干效应, 从而使系统从杂乱无章变为井然有序。例如, 岩土体系统中各要素相互作用仅仅是线性的, 那么无论它们怎样组合, 只有量的增减, 而不可能有质的变化, 也就不会有斜坡失稳, 地震和火山的爆发。

4) 涨落现象。涨落既可以来自系统内部, 也可以来自于外界环境。在系统发生相变时涨落起着重大作用。处在临界点处的系统, 原来的定态解失稳, 但系统不会自动离开定态解, 必须有涨落才能使系统偏离定态解。涨落是系统从原来的均匀定态形成耗散结构的最初驱动力。

正是满足了以上条件, 系统的发展过程可以发生突变, 通过能量的耗散和系统内非线性动力学机制来形成和维持与过去结构完全不同的宏观时空有序结构。

## 二、协同学<sup>[1~2,24]</sup>

协同学是德国理论物理学家哈肯(Haken)于1971年创立的, 它是从动力学的角度研

究从无序到有序结构演变的规律性。协同学的突出贡献是：发现了在分支点附近慢变量支配快变量的普遍原理并给予了动力学表述，该原理使人们对自组织的形成机制有了更深刻的认识。

协同学研究系统在外参量的驱动下和在子系统之间的相互作用下，以自组织的方式在宏观尺度上形成空间、时间或功能有序结构的条件、特点及其演化规律。协同系统的状态由一组状态参量描述，这些状态参量随时间变化的快慢程度各不相同。当系统逐渐接近于发生显著质变的临界点时，变化慢的状态参量的数目将会越来越少，有时甚至只有一个或少数几个。这些为数不多的慢变化参量完全确定了系统的宏观行为，可表征系统的有序化程度，称为序参量。协同学的主要内容就是用序参量演化方程研究系统的各种非平衡定态和不稳定性。

协同学提出了两个重要原理——伺服原理和最大信息熵原理，伺服原理在低维系统中又称为绝热消去原理。

伺服原理的基本思想是：虽快变量数目众多，但它们对相变的过程和结局不起多大作用；慢变量虽数目较少，但它们决定着演化的进程和结局。因此，可以想办法消掉快变量，用慢变量方程表示系统的演化，这便是绝热消去法，推广到  $n(n > 2)$  维则为何服原理。

最大信息熵原理：任何系统除了受到外界条件约束外，其内部总是具有一定的自由度，这种自由度导致系统内部的各元素处于不同的状态，状态多样性（复杂程度、混乱程度）的定量计量尺度称为熵，系统的熵会争取（或呈现）最大的自由度以实现熵的最大化，因此，系统的总信息在相变点存在极大值。由最大信息熵原理可以从宏观上推断系统从无序走向有序过程中临界点的具体位置。

协同学中求解序参量演化方程的方法主要是解析方法，即用数学解析方法求出序参量的精确的或近似的解析表达式及出现不稳定性的解析判别式。在分析不稳定性时，常常用数学中的分岔理论，在有势存在的特殊情况下也可应用突变理论。协同学也常采用数值方法，尤其是在研究瞬态过程和混沌现象时更是如此。

协同学与耗散结构理论及一般系统论之间存在诸多相通之处，它们之间既有联系又有区别。一般系统论提出了有序性、目的性和系统稳定性的关系，但没有回答形成这种稳定性的具体机制。耗散结构理论则从另一个侧面解决了这个问题，指出非平衡态可成为有序之源。协同学虽然也来源于非平衡态系统有序结构的研究，但它摆脱了经典热力学的限制，进一步明确了系统稳定性和目的性的具体机制。

### 三、混沌动力学<sup>[12-17]</sup>

混沌(chaos)一词首先出现在 Li 和 Yorke 1975 年发表的论文《周期 3 则混沌》中<sup>[12]</sup>。混沌是非线性系统中存在的一种普遍现象，但到目前为止，还没有一个很好的关于混沌的可操作的定义。然而不论哪一种混沌定义，都有一个共同的特点：在参数空间的一定范围内，确定性的非线性系统出现长期行为对初值的敏感依赖性。在混沌运动中，初值非常靠近的两条轨道随着时间的发展会指数分离。这也就是说，对轨道的长期行为不可能作出准确的预测。

对于保守系统，满足不同初始条件的解不会同时趋于同一点集；而对于耗散系统，满足不同初始条件的解可能趋于同一点集，这种点集被称为吸引子。混沌运动的吸引子通常

具有非整数维，因而也称为奇怪吸引子。

#### 四、分形理论<sup>[5-11]</sup>

分形是美国科学家 Mandelbrot 在 1977 年提出来的，他把海岸线、雪花、混沌等貌似杂乱无章，但具有精细结构的图形统称为分形。这里的精细结构主要指的是自相似结构，即它无统一的特征尺度，但在所有尺度上的图像是整体图像的一个缩影，彼此是相似的。分形的主要描述是分数维，即它的容量维数不是整数而是分数。维数是几何对象的一个重要特征量，它是几何对象中确定一个点的位置所需的独立坐标数目。在欧氏空间中，人们习惯把空间看成三维，平面看成二维，而把直线或曲线看成一维。

分形几何学的基本思想是：客观事物具有自相似的层次结构，局部与整体在形态、功能、信息、时间、空间等方面具有统计意义上的相似性，称为自相似性。这种自相似的层次结构，适当的放大或缩小几何尺寸，整个结构不变。

事实上，自然界中的绝大多数分形现象不能严格满足自相似条件，如连绵起伏的山脉轮廓线，曲折蜿蜒的江河，以及材料断裂后展示的断口图像等，它们的自相似是近似的，是统计意义上的自相似。关于统计分形的详细理论可参阅文献[9]。

#### 五、突变理论<sup>[1-7,12-18,23]</sup>

突变理论是 20 世纪 70 年代发展起来的一门数学学科，由法国数学家 Thom 于 1972 年正式创立。突变主要是指在事物的发展变化过程中，常常会从一个状态跳跃式地变到另一个状态，或者说经过一段时间缓慢的连续变化之后，在一定的外界条件下，会产生一种不连续的变化。这类突变现象在岩土工程中是普遍存在的，如地震、岩爆、滑坡、崩塌等都是突变现象。

突变理论主要以拓扑学为工具，以结构稳定性理论为基础，提出了一种新的判别突变、跳跃的原则，即在严格控制条件下，如果质变中经历的中间过渡态是稳定的，那么它就是一个渐变过程。Thom 指出，发生在三维空间和一维时间四个因子控制下的突变，有七种突变类型：折叠型突变(Fold Catastrophe)、尖点型突变(Cusp Catastrophe)、燕尾型突变(Swallowtail Catastrophe)、蝴蝶型突变(Butterfly Catastrophe)、双曲型脐点(Hyperbolic Umbilic)、椭圆型脐点(Elliptic Umbilic)和抛物型脐点(Parabolic Umbilic)。在七种突变模型中，最常用的是第二种，即尖点突变模型，如图 1-5 所示。由图 1-5 可知，三维空间的坐标分别为控制参数  $a$ 、 $b$  和状态变量  $x$ 。分叉集的图像在控制参数( $a$ ,  $b$ )控制的平面上为一个半立方抛物线，即平衡曲面上下两叶折屈边界在系统控制参数( $a$ ,  $b$ )平面上的投影，也就是平衡曲面到控制参数平面的拓扑映射。因此，分岔点集( $a$ ,  $b$ )将控制参数平面划分成两个区域，一个在叉形三角区域内，另一个在叉形三角区域外。

根据图 1-5 可总结出突变模型的主要特点有：

- 1) 多模态，系统中可能出现两个或多个不同的状态，也就是说，系统的位势对于控制参数的某些范围可能有两个或多于两个的极小值；
- 2) 不可达性，在平衡曲面折叠的中间部分，有一个不稳定的平衡位置，系统不可能处于此平衡位置(即不可达)。从微分方程解的角度，不可达对应着不稳定解；
- 3) 突跳，控制参量很小的变化会引起状态变量很大的变化，从而导致系统从一个局

部极小值临界点突跳到另一个局部极小值临界点。发生突跳时,势能(或状态)会从一个逐渐消失的局部极小值转移到全局或局部极小值的另一个临界点,这种转移是以突变方式完成的,即势能的变化是不连续的;

4) 发散,在临界点附近区域,控制参数初值的微小变化(微扰)可能导致终态的巨大差别,这表明对参数的微小扰动将引起系统物理过程或系统状态本质的变化;

5) 滞后,任何一个物理系统不能严格地逆向重复某种变化过程时,就会出现滞后现象。例如,尖点突变并不是在分岔集内发生,而是在分岔集线上发生,从底页跳到顶叶与从顶叶落到底页发生的位置不一样;

6) 多径性,状态变量在平衡曲面中处于某一状态,可以通过控制参量变化的不同路径来实现。

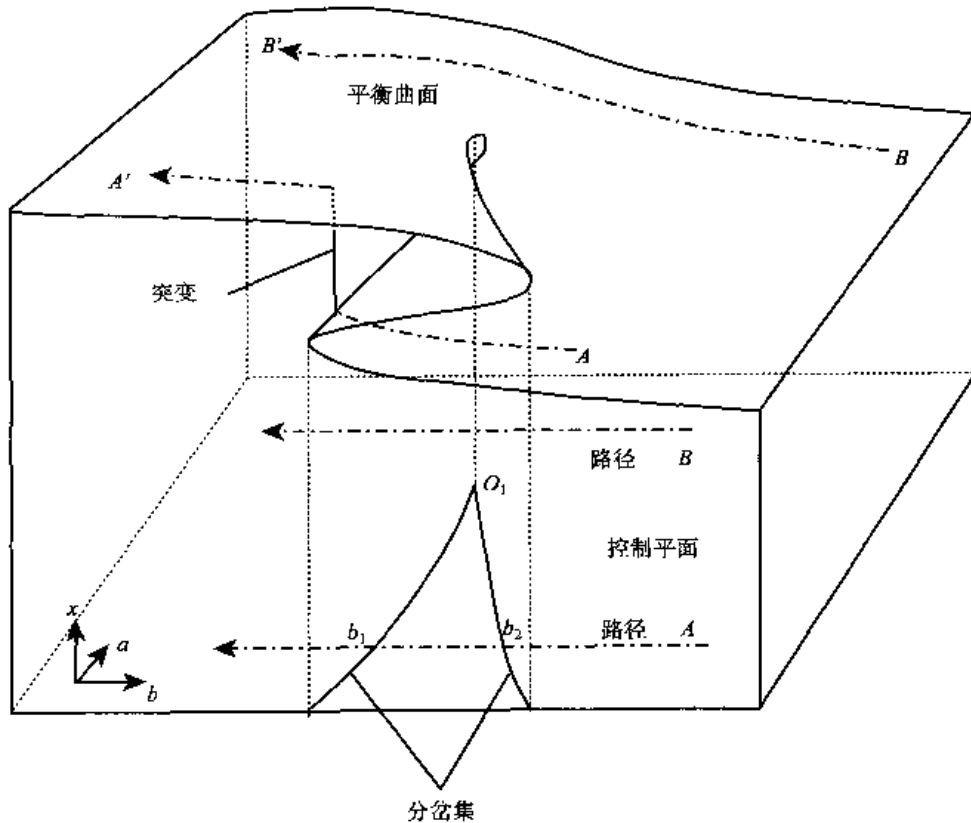


图 1-5 尖点突变模型

由于突变理论在岩土体系统的非线性理论分析中占有重要地位,下面将详细地进行介绍。

### 1. 梯度系统、突变及其条件

在力学系统中,质量为  $m$  的质点的牛顿第二定律可以表示为

$$m\ddot{x} = -\dot{x} + F \quad (1-23)$$

式中,  $-\dot{x}$  表示阻尼项;  $F$  表示外力项,若外力有位势  $V$ , 即

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (1-24)$$

则牛顿方程(1-24)可表示为



$$m\ddot{x} = -\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (1-25)$$

如果系统加速度较小, 则方程(1-25)可近似写为

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F \quad (1-26)$$

它表示阻尼力与外力平衡。方程(1-26)称为梯度系统。

设梯度系统的平衡点为  $x^*$ , 它满足:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x^*} = 0 \quad (1-27)$$

因此, 平衡点  $x^*$  是位势的临界点或驻点, 它的稳定性由  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  在该点的正、负号决定:

若  $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x^*} > 0$  (位势  $V$  的极小值点), 则平衡点  $x^*$  是稳定的, 它称为梯度系统的吸引子; 若  $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x^*} < 0$  (位势  $V$  的极大值点), 则平衡点  $x^*$  是不稳定的, 它称为梯度系统的排斥子。归纳起来为:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x^*} = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x^*} > 0 & \text{(位势 } V \text{ 的极小值点) } x^* \text{ 是吸引子} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x^*} = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x^*} < 0 & \text{(位势 } V \text{ 的极大值点) } x^* \text{ 是排斥子} \end{cases} \quad (1-28)$$

吸引子与排斥子的分岔点满足:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x^*} = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x^*} = 0 \quad (1-29)$$

它是位势的拐点, 常是结构不稳定之处。

## 2. 通用扩展和余维数

为了讨论方便, 通常位势  $V(x, \mu)$  取为  $x$  的多项式。不失一般性, 将满足条件(1-29)的  $x^*$  和  $\mu$  取为  $(x^*, \mu) = (0, 0)$ , 这里  $\mu$  为控制参数。

设势函数  $V(x)$  在  $\mu=0$  处具有如下型式:

$$V(x) = a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \quad (\mu = 0) \quad (1-30)$$

设  $a_3 \neq 0$ , 则在  $x=0$  附近,  $x^4$ 、 $x^5$  等阶小项可忽略, 而且可以通过变换使  $a_3 = 1/3$ , 则式(1-30)可近似写为

$$V(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad (\mu = 0) \quad (1-31)$$

扩展式(1-31), Thom 提出这种扩展的标准形式为

$$V(x, \mu) = \frac{1}{3}x^3 + \mu x \quad (1-32)$$

$\mu=0$  时, 式(1-32)退化为式(1-31)。因为由式(1-32)表征的位势  $V$  内只含一个控制参数  $\mu$ , 此时称系统的余维数为 1。

以此类推,  $V(x) = \frac{1}{4}x^4$ ,  $\frac{1}{5}x^5$ ,  $\frac{1}{6}x^6$  ( $\mu=0$ ) 的通用扩展分别是

$$V(x, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\mu_2x^2 + \mu_1x \quad (1-33)$$

$$V(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}\mu_3x^3 + \frac{1}{2}\mu_2x^2 + \mu_1x \quad (1-34)$$

$$V(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}\mu_4x^4 + \frac{1}{3}\mu_3x^3 + \frac{1}{2}\mu_2x^2 + \mu_1x \quad (1-35)$$

它们相应的梯度系统的余维数分别是 2, 3, 4。

由式(1-32)、式(1-33)、式(1-34)和式(1-35)构成的梯度系统出现的突变分别称为折叠、尖点、燕尾和蝴蝶突变。下面我们重点说明折叠突变和尖点突变。

### 3. 折叠突变

折叠突变的梯度系统由式(1-32)得到：

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x^2 - \mu \quad (1-36)$$

其位势函数  $V(x, \mu)$  的图像如图 1-6 所示，图中黑点代表系统所处的位置。由方程(1-36)可看出，系统在  $\mu < 0$  时有两个平衡点：

$$\begin{cases} x_1^* = -\sqrt{-\mu} \\ x_2^* = \sqrt{-\mu} \end{cases} \quad (1-37)$$

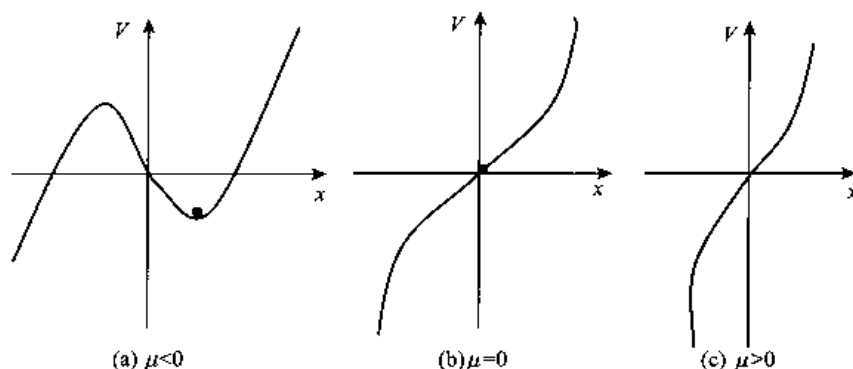


图 1-6 折叠突变势函数图像

由图 1-6(a) 可看出， $x_1^*$  是位势  $V$  的极大值点，是一个排斥子； $x_2^*$  是位势  $V$  的极小值点，是一个吸引子。方程(1-36)在  $\mu > 0$  时无平衡点。

系统发生突变时应满足下式，即

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = x^2 + \mu = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2x = 0 \end{cases} \quad (1-38)$$

其解为  $(x^*, \mu) = (0, 0)$ 。梯度系统(1-36)的解随  $\mu$  的变化如图 1-7 所示。从图 1-7 可看出，随着  $\mu$  从负到正，原先在  $\mu < 0$  的吸引子(稳定解)在  $\mu = 0$  处消失，然后随着  $t \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ 。

事实上，由图 1-6 也可看出，当控制参数  $\mu$  由  $\mu < 0$  变到  $\mu > 0$  时，原来处于位势极小值处的质点，由于位势极小值的逐步抬高，到达  $\mu = 0$  时，质点已处于位势拐点的位置上，

质点必然要突然滑下来, 进入  $t \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  的状态。

在图 1-7 中,  $\mu < 0$  的两个平衡点投影到  $\mu$  轴上被折叠在一起。

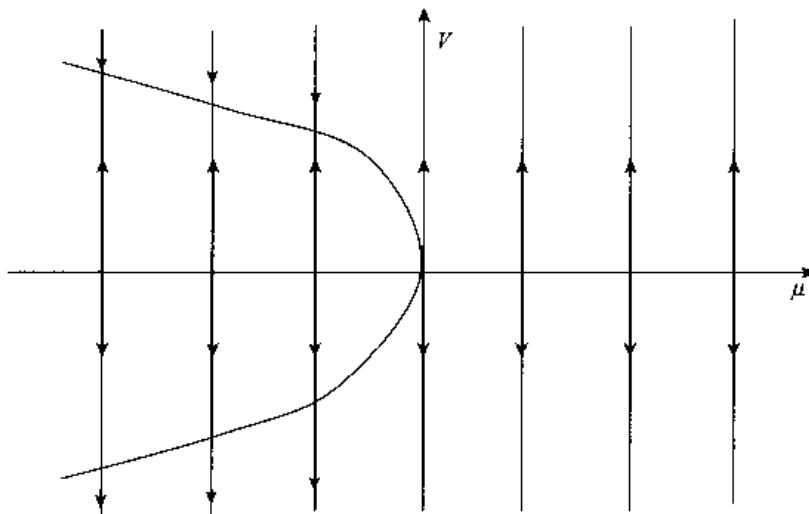


图 1-7 折叠突变系统的解随控制参数的变化图

#### 4. 尖点突变

尖点突变的梯度系统由式(1-33)得到

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x^3 - \mu_2 x - \mu_1 \quad (1-39)$$

为了更好地分析式(1-39), 我们先分析它的两个特殊情况, 后分析其一般情况。

(1)  $\mu_1 = \text{常数}$  (取  $\mu_1 = 0$ )

此时, 式(1-39)化为

$$\dot{x} = -x^3 - \mu_2 x = -x(x^2 + \mu_2) \quad (1-40)$$

相应系统的位势函数为

$$V(x, \mu_2) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\mu_2 x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 + 2\mu_2) \quad (1-41)$$

其图像如图 1-8 所示, 图中黑点代表系统所处的位置。

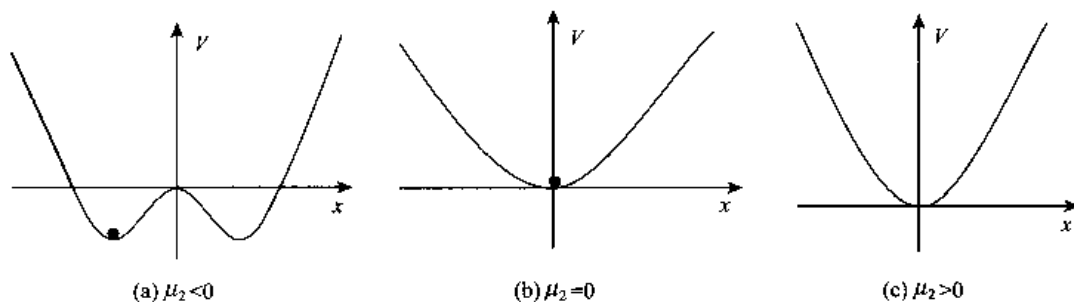


图 1-8  $V(x, \mu) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\mu_2 x^2$  的图像

系统的平衡点可由式(1-40)确定, 即

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-\mu_2} & (\mu_2 < 0) \\ x_1^* = 0 & (\mu_2 > 0) \end{cases} \quad (1-42)$$

$\mu_2 < 0$  时,  $x_1^*$  是位势  $V$  的极大值点, 是一个排斥子;  $x_{2,3}^*$  是位势  $V$  的极小值点, 是两个位势相等的吸引子。 $\mu_2 > 0$  时, 只有一个平衡点  $x_1^*$  是位势  $V$  的极小值点, 是吸引子。

发生突变时应满足下式, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = x^3 + \mu_2 x = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3x^2 + \mu_2 = 0 \end{cases} \quad (1-43)$$

其解为  $(x^*, \mu_2) = (0, 0)$ 。

系统(1-40)的解随控制参数  $\mu_2$  的变化如图 1-9 所示。从图 1-9 可看出, 随着  $\mu_2$  从负到正, 原先在  $\mu_2 < 0$  的两个吸引子(稳定解)在  $\mu_2 = 0$  处合并, 它表示原来处于位势极小值处的质点, 随着位势极小值的逐步抬高, 达到  $\mu_2 = 0$  时, 质点已处于位势的新极小值的位置上。

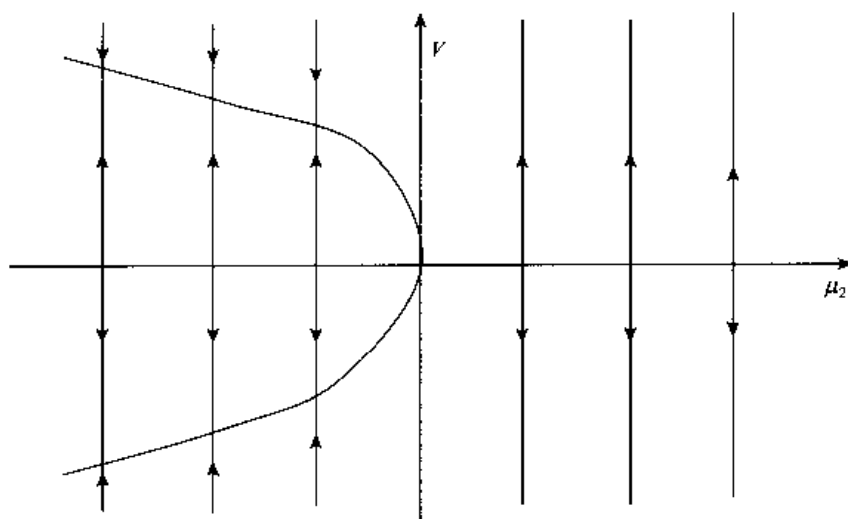


图 1-9 系统(1-40)的解随控制参数  $\mu_2$  的变化图

(2)  $\mu_2 = \text{常数}$  (取  $\mu_2 = -3$ )

系统(1-39)化为:

$$\dot{x} = -x^3 + 3x - \mu_1 = -(x^3 - 3x + \mu_1) \quad (1-44)$$

此时系统的位势函数为:

$$V(x, \mu_1) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \mu_1 x \quad (1-45)$$

其图像如图 1-10 所示, 图中黑点代表系统所处的位置。

系统的平衡点可由方程(1-44)确定, 即

$$x^3 - 3x + \mu_1 = 0 \quad (1-46)$$

而且平衡点的个数取决于：

$$D = -1 + \frac{1}{4}\mu_1^2 \quad (1-47)$$

当  $|\mu_1| > 2$  时,  $D > 0$ , 位势  $V$  只有一个极小值(吸引子, 图 1-10(a)和(e)); 当  $|\mu_1| < 2$  时,  $D < 0$ , 位势  $V$  有一个极大值(排斥子, 图 1-10(c))和两个极小值(吸引子, 图 1-10(c))。在  $|\mu_1| = 2$  处,  $D = 0$ , 会发生突变(图 1-10(b)和(d))。

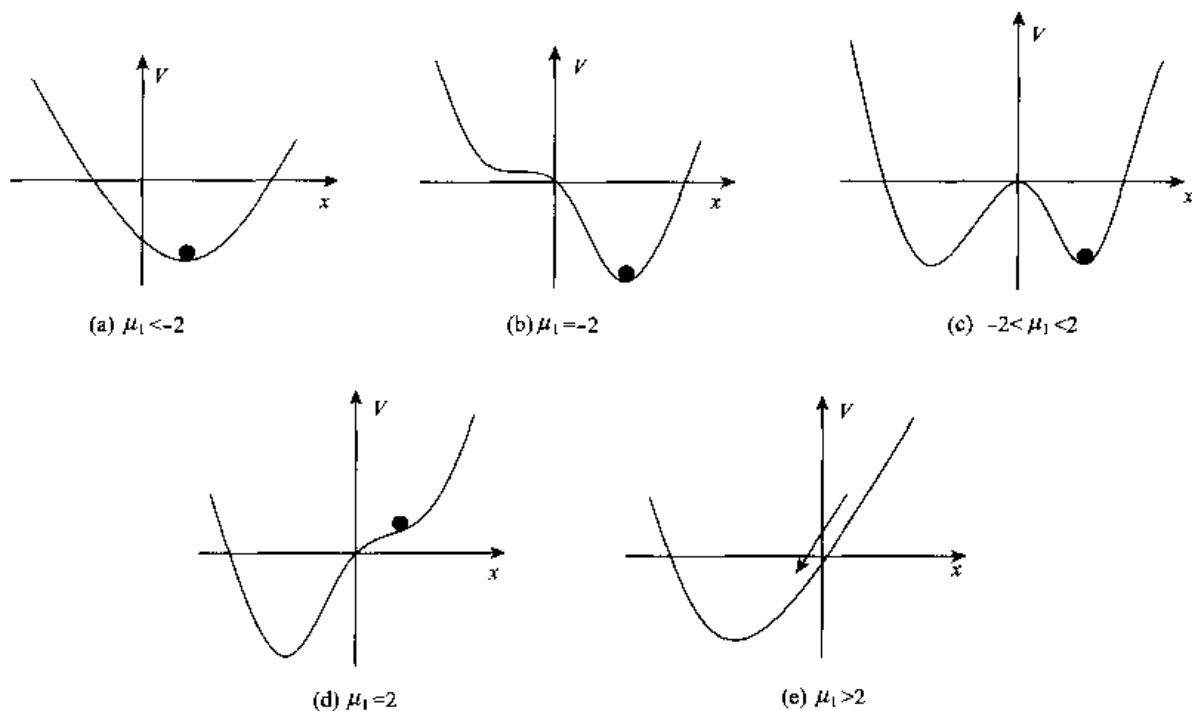


图 1-10  $V(x, \mu_1) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \mu_1 x$  的图像

根据式(1-45), 突变点应满足如下条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = x^3 - 3x + \mu_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (1-48)$$

其解为  $(x^*, \mu_1^*) = (\pm 1, \pm 2)$ 。

系统(1-44)的解随着控制参数  $\mu_1$  的变化如图 1-11 所示。从图 1-11 可看出: 若原来质点处于  $Q'$  的左边时, 位势只有一个极小值, 进入  $Q'$  点以后到  $P$  点以前, 位势有一个极大值和两个极小值, 但质点仍处在原来极小的位置上, 到达  $P$  点时, 质点原在的极小值位置变成了拐点。只要  $\mu_1$  稍稍大于 2, 质点将突变跳到另一个极小值的位置  $Q$ 。反之, 随着参数  $\mu_1$  由大变小, 状态由  $Q$  沿  $QP'$  线达到  $P'$ , 质点突变跳到  $Q'$ 。这就是系统(1-44)所表征的突变现象。而且  $\mu_1$  由小到大和由大到小的突变发生在不同的位置上, 这个现象即为滞后性。

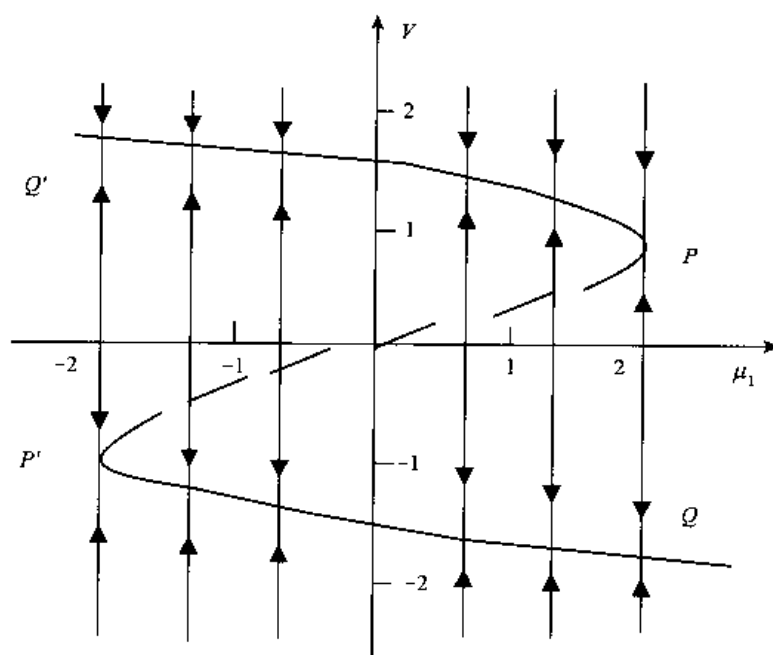


图 1-11 系统(1-44)的解随控制参数  $\mu_1$  的变化图

(3)  $\mu_1$  和  $\mu_2$  为变量的情况

对方程(1-33)求导, 由  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$  和  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$  确定突变点, 即

$$\begin{cases} x^3 + \mu_2 x + \mu_1 = 0 \\ 3x^2 + \mu_2 = 0 \end{cases} \quad (1-49)$$

其中第一式也是平衡点的方程。消去  $x$  得到

$$D = \frac{\mu_2^3}{27} + \frac{\mu_1^2}{4} = 0 \quad (1-50)$$

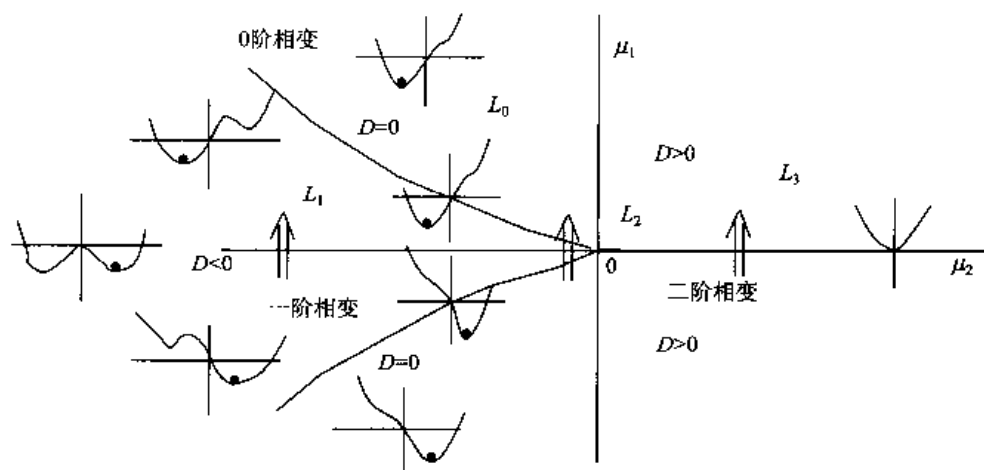


图 1-12 系统(1-33)的尖点突变

在控制参数平面 $(\mu_2, \mu_1)$ 上,  $D = \frac{\mu_2^3}{27} + \frac{\mu_1^2}{4} = 0$  的图像如图 1-12 所示, 它是在 $(\mu_2, \mu_1) = (0, 0)$ 处形成尖点的两条曲线。正由于此, 这种突变称为尖点突变。这两条曲线将参数平面 $(\mu_2, \mu_1)$ 分成  $D < 0$  (两曲线之间) 和  $D > 0$  (两曲线之外) 的两个区域。在  $D < 0$  的区域, 位势有两个极小值(吸引子)和一个极大值(排斥子), 而在  $D > 0$  的区域, 位势  $V$  只有一个极小值(吸引子)。而在  $D = 0$  的线上, 位势  $V$  只有一个极小值和一个拐点, 在这里会出现突变现象。

## 六、协同性与 Haken 受控原理

在系统的分岔和突变现象分析中, 系统的行为受到许多控制参量的影响, 随着控制参数的变化, 系统呈现多样化的运动, 并最终显示有序的特征。Haken 认为这是非线性开放系统的各子系统共同协作的结果, 称为协同性<sup>[24]</sup>。

Haken 同时还认为, 在这种开放的耗散系统中, 由于内部的相互作用, 只要用极少数的几个控制参量(称为序参量)即可确定系统的演化。序参量的演变过程用梯度系统及相应的位势描述最为合适, 这是开放的非线性耗散系统的普适规律, Haken 称它为受控原理, 数学上称为中心流形定理。下面举例说明。

对下述非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = -\beta y + x^2 \end{cases} \quad (\beta > 0) \quad (1-51)$$

显然, 系统(1-51)只有一个平衡点:

$$(x^*, y^*) = (0, 0) \quad (1-52)$$

其 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad (1-53)$$

矩阵的特征值为

$$\begin{cases} s_1 = -\beta < 0 \\ s_2 = 0 \end{cases} \quad (1-54)$$

因此, 平衡点 $(x^*, y^*) = (0, 0)$ 为鞍-结点。对应于  $s_1 = -\beta$  的特征向量(满足  $JX = -\beta X$ )为 $(x=0, y \text{ 任意})$ 。由式(1-51), 令  $x=0$  求得:

$$\dot{y} = -\beta y \quad (1-55)$$

$$y(t) = y(0)e^{-\beta t} \quad (1-56)$$

所以,  $(x=0, y \text{ 任意})$ 为一稳定流形  $M^*$ , 它以  $e^{-\beta t}$  的方式趋于平衡点。但对应于  $s_2 = 0$  在平衡点附近的流形就较为复杂了。由式(1-51)有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta y - x^2}{xy} \quad (1-57)$$

在平衡点附近, 应用幂级数解法, 令

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (1-58)$$

将其代入方程(1-57), 并比较系数求得:

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{\beta} \\ c_3 = 0 \\ c_4 = \frac{2}{\beta^3} \end{cases} \quad (1-59)$$

$$y = \frac{1}{\beta}x^2 + \frac{2}{\beta^3}x^4 + \dots \quad (1-60)$$

这就是由  $s_2 = 0$  求得的不变流形，它就是中心流形  $M^c$ ，如图 1-13 所示。

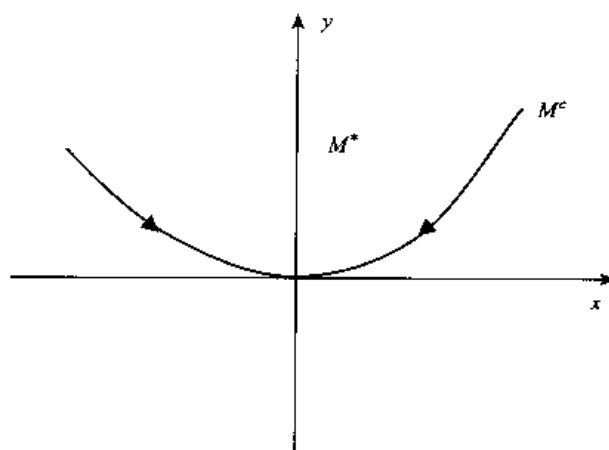


图 1-13 系统(1-51)的流形

将式(1-60)代入式(1-51)第一式有

$$\dot{x} = -\frac{1}{\beta}x^3 - \frac{2}{\beta^3}x^5 + \dots \quad (1-61)$$

在  $x=0$  附近，上式近似为

$$\dot{x} = -\frac{1}{\beta}x^3 \quad (1-62)$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(0)} = \frac{2}{\beta}t \quad (1-63)$$

由此可知，中心流形  $x(t)$  以  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  的方式(相应  $y(t)$  以  $\frac{1}{t}$  的方式)趋于平衡点。

综上所述可知，非线性系统稳定流形( $x=0$ )上的点以  $e^{-\beta x}$  的方式趋于平衡点，而中心流形上的点以  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  和  $\frac{1}{t}$  的方式趋于平衡点。两者比较即知，式(1-51)第二式是快变量方程，第一式是慢变量方程。这样，经过较短时间  $\dot{y}$  就已很小，可设快变量方程(1-51)第二式中  $\dot{y}=0$ ，求得

$$y = \frac{1}{\beta}x^2 \quad (1-64)$$



慢变量方程(1-51)第一式可以写为

$$\dot{x} = -\frac{1}{\beta}x^3 \quad (1-65)$$

上式就是确定系统(1-51)演变控制方程。方程(1-65)是一个梯度系统，其位势为

$$V = \frac{1}{4\beta}x^4 + \mu_0 \quad (1-66)$$

## 第四节 非线性科学理论的研究对象

非线性科学的每一种理论都有自己的研究方法。①耗散结构理论解决的是远离平衡系统非线性结构出现的条件和时空有序结构形成及转化问题。通过耗散结构理论，可了解系统如何开放、开放的尺度如何以及如何产生非线性自组织行为等诸多问题。②协同学研究的是系统中子系统之间是怎样合作以产生宏观的空间结构、时间结构或功能结构的。它在非线性科学中处于一种动力学方法论的地位。协同学中的竞争、协同、支配以及序参量的概念和原理对于进行非线性研究有着重要的指导意义。③突变理论突破了数学和纯粹自然科学的界限，是研究非线性系统演化途径的重要工具。其中的临界点、渐变、突变等概念，以及在处理问题时所采取的结构化方法，对理解系统的内在性质具有重要意义。④分形理论和混沌理论指出了非线性系统的时空结构以及演化秩序。分形理论提供了一种研究系统由简单走向复杂的空间状态及演化状况的方法。研究系统的分形特性对于掌握复杂现象、模拟复杂结构及其演化过程有着重要意义。混沌理论指出了非线性系统演化过程中的时间复杂性问题。与分形理论相比，混沌理论的侧重点在于研究系统在走向复杂化过程中的时间演化特征。

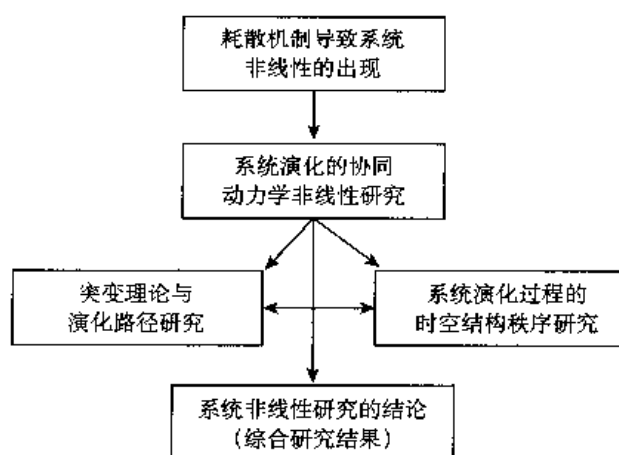


图 1-14 非线性科学理论的相互关系

图 1-14 形象地表达了非线性科学理论之间的相互关系。

## 第五节 岩土体演化行为的非线性研究进展与前景

岩土体演化行为的非线性研究主要集中在<sup>[1~5,31~51]</sup>以下方面：①边坡问题的非线性研究；②活断层稳定性评价；③岩样-压机系统失稳；④地下洞室失稳、岩爆与冲击地压；⑤非线性土压力研究；⑥岩石破裂中的分形问题；⑦砂土液化的非线性研究等。总体看来，非线性模型更多的是一种“披着定量化外衣的”定性模型。但由这些模型出发，可以得到一些既有趣、又有用，且发人深省的结论。

## 一、地下水对岩土体的非线性作用机制

过去一般认为,水对边坡的作用主要有:①水与岩土介质的相互作用,包括物理化学作用和力学效应,如冲刷与潜蚀作用、化学腐蚀效应、静水压力、动水压力及浮托力作用等;②水与岩土介质的相互作用存在着显著的时间效应;③水与岩土介质的相互作用导致岩土介质内部结构的破坏与力学参数的降低,即水对岩土介质具有损伤作用;④水与岩土介质的相互作用随着含水量的变化而变化,例如在微观上基质吸力的消失等。秦四清等<sup>[31~36]</sup>通过对边坡的突变分析认为:水还有一种更重要的作用,即增大滑面介质材料均匀性(脆性)和降低刚度比的作用。

地下水作用下的坡体,可以认为是打破了原有的平衡状态区域,而这个平衡态可以理解为物理上的力学平衡。假设在滑动面内部某平衡区域内有一单元体,它的内部可用字母“e”表示,它的周围是受其影响的平衡区,可用“R”表示(如图 1-15 所示)。假定在某一时刻单元体发生势扰动,使得  $\Delta E = E_e - E_R > 0$ , 即单元体内部的势高于单元体外部的势。单元体发生势扰动的同时,单元体内部的力学平衡也发生扰动,但力学扰动可以迅速地与周围单元达到力学平衡,而使得  $\Delta P = P_e - P_R = 0$ , 这是因为力学平衡进行速度很快,而势(能)扰动的平衡却较慢。

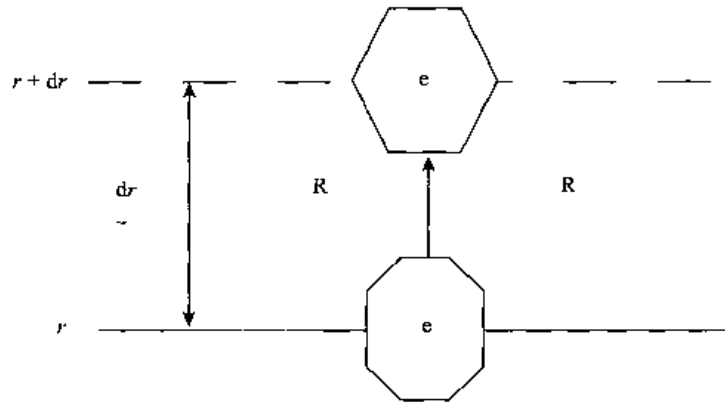


图 1-15 势扰动示意图

若存在  $\Delta E > 0$ ,  $\Delta P = 0$ , 则必然引起密度的扰动  $\Delta \rho = \rho_e - \rho_R < 0$ , 即单元体内的密度低于周围单元体的密度。由于单元体受到某一推动力  $-p\Delta\rho$  的作用( $p$  为推力系数), 并在推动力作用下运动。当单元体因推动力作用运动了  $dr$  距离以后( $dr$  为正值), 单元内部密度与周围单元的密度差为

$$\Delta\rho(r + dr) = \Delta\rho(r) + dr \times \frac{d}{dr}(\Delta\rho) \quad (1-67)$$

式中,  $\Delta\rho(r) < 0$ ,  $dr > 0$ 。因此, 若  $\frac{d}{dr}(\Delta\rho) \leq 0$ , 则  $\Delta\rho(r + dr) < 0$ , 即运动了  $dr$  距离以后, 单元体内的密度仍然低于周围单元体的密度, 那么这个单元体可以继续获得推动力的作用而继续运动, 直至  $\Delta\rho(r + dr) = 0$ 。反之, 若  $\frac{d}{dr}(\Delta\rho) > 0$ , 则这个单元体将受到阻力而停止运动。由此可知, 势扰动引发单元体运动的条件是

$$\frac{d}{dr}(\Delta\rho) \leq 0 \quad (1-68)$$

因此,正是边坡中水的作用,增强了边坡滑动面内部材料的均匀性,使边坡从无序向有序(失稳)演化。

## 二、滑坡的非线性预报

滑坡预测预报研究从 20 世纪 60 年代开始起步,现已成为滑坡研究中的一个热门课题。由于滑坡问题的复杂性,目前滑坡时间预报仍是一个世界性的科学难题。随着滑坡研究的深入发展,20 世纪 90 年代以来人们认识到:对滑坡位移-时间曲线的拟合外推常常只能对滑坡近期行为趋势作出有限的预测,在众多因素作用下,要准确、可靠地预报滑坡的长期行为是困难的<sup>[39]</sup>。因此,不少学者提出了逐步追踪预报的思想。李天斌<sup>[53-54]</sup>、余宏明等<sup>[55]</sup>应用滑坡动态数据的时间序列分析法建模,提出了滑坡动态跟踪预测的观点。另一方面,由于系统科学和非线性科学的发展,人们认识到滑坡是一个开放系统。滑坡预报不仅仅是一个纯方法问题,要实现较为准确的预报,必须将斜坡变形破坏机制分析与定量预报相结合,运用系统综合集成、系统分析、系统模拟的方法对滑坡系统进行识别、模拟及预测预报。有些学者开始重视对滑坡宏观前兆和宏观判据的研究,并着重从物理现象和物理模型分析入手进行滑坡预报的探索。1993 年,秦四清等<sup>[56]</sup>以非线性动力学理论为基础,提出滑坡孕育的非线性动力学模型,进而预报滑坡发生时间;1994 年,廖小平<sup>[57]</sup>;1996 年,徐峻龄等;1997 年,桂立铭等依据弹塑性力学原理提出了滑坡预测的功率模型;1996 年,文宝萍<sup>[60]</sup>提出了滑坡灾变预测及判据的数学模型;黄润秋<sup>[61]</sup>、许强<sup>[62]</sup>于 1997 年提出了蠕动边坡失稳预测模型。秦四清<sup>[32]</sup>认为,统计预报缺乏物理基础,不仅用于预报的参数或指标物理意义不明确,而且预报结果与选用不同蠕变阶段的数据有关,常带有很大的主观随意性,滑坡时间预报研究要取得重大进展,必须从统计或经验预报转向物理预报。

需要指出的是,研究边坡失稳预测预报问题,需要明确的一个问题是英语语境中的 forecasting 和 prediction 具有与汉语语境完全不同的含义。正如文献[40]所述,forecasting 说的是 something would happen(probably),而 prediction 说的是 something will happen(definitely)。不能单纯地认为 forecasting 和 prediction 都是可能或者都是不可能的,一般说来,forecasting 还是可能的,但 prediction 非常困难。

## 三、岩土介质非线性研究的前沿问题

### 1. 岩土工程的传统理论支撑

传统的岩土工程理论基础可初步归纳如下八点:

- 1) 守恒定律:包括质量守恒与能量守恒,守恒定律的平衡关系既可表达成微分方程式,也可针对有限空间和时间来建立;
- 2) 牛顿三大定律:描述和分析刚性岩上结构运动行为的基础;
- 3) 叠加性和均匀性原理:线性系统输入与输出之间定量表述的基础;
- 4) “门槛”效应:针对岩土体失稳、破坏等现象,寻求其定量计算方法的基础,例如斜坡的稳定性系数;

5) 统计综合: 定量分析各种因果关系最初等的方法, 直观、简单而常用;

6) 随机独立性假设: 分析岩土介质与结构参数对其稳定性影响的前提, 也是使用统计试验法分析本构关系的前提, 到目前为止的主流分析方式几乎都如此;

7) 平稳性假设: 利用岩土结构时间序列自身演变规律推测其未来变换的基础;

8) 相似性假设: 假设形成条件相似和几何相似, 即演化过程相似, 与此相对应的是工程地质类比法的提出。

在上述八点中, 前两点属于基本物理学规律, 表明了物理学对岩土工程学科的深刻影响。随着科学的发展, 物理学必然会广泛而深刻地影响岩土工程学科的发展。后六点则属于对岩土结构本构关系以及求解手段的认识。从哲学观点看, 以上这些理论几乎无一不是线性思维的产物。事实反复证明, 它们只有在一定条件下才是正确的, 而对于其他情况则是近似的, 必须在理论与方法上有所突破才能使岩土工程的研究获得进一步发展。

## 2. 关于岩土工程中非线性问题的思考

### (1) 关于非线性的含义<sup>[32]</sup>

科学发展到今天, 非线性至少有三种含义:

1) 数学上的含义。在代数学中称变量之间的直线函数关系为线性关系, 对这种关系的偏离称为非线性。在数学物理方程中, 未知变量及其导数为一次的而且系数与未知变量无关的微分方程为线性微分方程, 否则为非线性微分方程。在概率论中, 若随机变量之间相互独立, 则表现为线性关系, 否则, 表现为非线性关系。

2) 系统论中的含义。凡既满足均匀性又满足叠加性的系统称为线性系统, 否则为非线性系统, 其中不满足均匀性但满足叠加性的称为第一类非线性系统; 两者均不满足的称为第二类非线性系统。

3) 非线性科学中的含义。相互联系的事物之间相互影响、相互制约、相互依存, 这就是非线性科学的实质。

岩土体存在非线性的根源之一是介质的非均匀性; 根源之二是其内部的相互作用, 包括发生在同一介质和不同介质中各种子系统的相互作用; 根源之三是外部条件如地下水作用、地震作用、气候影响和人类活动等对岩土体的复杂影响。

### (2) 研究尺度

问题的实质是如何揭示不同尺度条件下, 同一岩土体演化行为之间的相互关系。该问题主要包括:

1) 岩土工程试验, 尤其是室内试验能否真实地反映岩土体系统的物理及力学性质。大量事实说明, 对同一研究对象采用不同的物理模拟尺度所得的结果也不一样。因此, 在推求工程对象的力学条件和边界条件时, 所遵循的基准(标准)的研究, 是一个值得深入研究的关键问题。

2) 在相同控制条件下, 同一个岩土参数在不同尺度岩土体对象上的表现是否存在转换关系。例如: 两个形状、岩性、孔隙率、含水率完全相同但尺度不相同的岩体, 它们的力学参数和演化行为是否相同。如果不同, 又存在怎样的关系, 传统的方法在这个问题中的适用性如何。

### (3) 空间结构变异问题

岩土体物理力学参数的空间变异性通常表现为分区性、非分区性和空间随机性。分区

性是指区域性或地带性，区域与区域或地带与地带之间的变化是不连续的。非分区性是指随空间位置呈连续变化的特征。空间随机性是指空间分布具有随机性。不同表现形式的空间变异性，应该使用不同的处理方法。

#### (4) 确定性与随机性问题

在过去相当长的时期内，人们总是将确定性与随机性看作是对立的，统计力学的出现为解决其矛盾提供了新的途径。如通过物理实验得出的气体状态方程是一个确定性定律，统计力学则在考察气体分子的独立随机运动的基础上，借助于概率论中的大数定律等也导出了这一气体状态方程。这一事实说明了一个现象所表现出的确定性一面和随机性一面不是对立的，而是互补的。

研究表明，确定性与随机性的互补至少可以体现在下列几个方面：①从微观上考虑表现出随机性，但从宏观上考量却表现出确定性；②确定性现象也包含内在随机性，即具有“蝴蝶效应”的混沌性；③大量随机性之总和可表现出确定性，即大数定律。

随机微分方程理论、随机系统理论和贝叶斯理论的出现为人们处理确定性与随机性的互补关系，或者说统一处理一个事物在发展过程中所表现的确定性一面和随机性一面提供了有力的工具。

#### (5) 时间序列长期演变规律问题

虽然人们 20 世纪 90 年代开始提出了大量的预报模型和理论，并且认识到岩土体的演化过程受内在结构控制和外部环境影响。由于这两个因素既受自然演化过程影响，又受人类活动影响，因此时间序列演变规律研究必须从探索其自然演化规律和人类活动影响两方面入手。

但到目前为止，仍未掌握时间序列的自然演化的驱动因子或其演化规律，就连人类自身引起的问题，也是因为其相当无序而无法确切地掌握。长期以来，人们试图用趋势性、周期性、随机性、模糊性、灰色性、混沌性，或者它们之间的某种组合来描述时间序列的规律，但都不能奏效。

#### (6) “异参同效”和预测模型问题

对于相同的模型结构和相同的模型输入，会有多个最优参数组合使模型输出具有相同的拟合精度。出现“异参同效”的原因至少有：目标函数是多极值的；模型中包含的参数之间存在相互补偿作用；模型参数具有随机性。

现行的岩土工程数值分析模型，由于对物理过程的描写与定量计算过于粗略和概化，实际上只具有模拟功能，属于“模拟模型”。这种模型容易做到模拟或复演过去已经发生过的现象，利用计算机的数据处理和运算优势，只要不断地调整模型的结构和参数，这是不难做到的。在科学上和应用中，最具有价值、能预测未来的“预测模型”和“分析模型”的构建是十分困难的，这只有在人们对岩土体演化过程的物理规律有了足够的认识才有可能实现。避免“异参同效”及构建“预测模型”或“分析模型”都必先加强对研究对象模型结构的物理机理研究，其次才是对模型参数率定技术的研究。

### 四、岩土体非线性行为的研究前景与意义

用非线性科学研究岩土体的演化行为，其研究意义可归纳为：

1) 对于过去边坡研究中得不到满意解释的很多现象，用非线性科学理论可以做出合理的解释，如典型蠕变三阶段现象及滑坡长期预报的失效现象等。

2) 对于传统边坡研究中观测到的, 但用比较复杂的模型才能加以解释的一些现象, 用边坡的非线性模型可以做出“另一种”更为简单的解释。这些现象包括地下水新作用机制的发现等。

3) 非线性科学对过去定性的岩土力学模型给出了半定量和定量的表示方法, 如边坡的非线性动力学演化过程等。

4) 非线性科学改变了我们原来的一些基本观念, 如从试图寻找有效的滑坡预测方法到思考滑坡预测可能性的转变, 从统计预报向物理预报的转变。

目前的非线性岩土力学研究, 存在着两个明显的问题。第一个问题是, 我们目前的研究还处于一个“初级阶段”, 主要是针对简单系统如何建立非线性模型及得到其数学表达式。事实上, 从非线性模型的建立到用之于实践, 还有许多工作要做, 因此目前的研究在相当程度上还是“示意性”的。第二个问题是, 我们对观测或监测资料的利用还很不够, 很多工作仅仅局限于传统的数据叠加分析, 还有待于突破。实际上, 这里涉及两个“接口”, 一个数学、力学与地质学之间的“接口”, 一个是理论和实际之间的“接口”。只有把这两个“接口”处理好, 我们的研究才会真正正常地“运转”起来。

## 参 考 文 献

- [1] 秦四清, 张倬元, 王士天, 黄润秋. 非线性工程地质学导引[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.
- [2] 黄润秋, 许强. 工程地质广义系统科学分析原理及应用[M]. 北京: 地质出版社, 1997.
- [3] 王来贵, 黄润秋, 王泳嘉等. 岩石力学系统运动稳定性理论及其应用[M]. 北京: 地质出版社, 1998.
- [4] 莫志全. 边坡工程非线性分析理论及应用[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 2005.
- [5] 林振山. 非线性科学及其在地学中的应用[M]. 北京: 气象出版社, 2003.
- [6] 仪垂祥. 非线性科学及其在地学中的应用[M]. 北京: 气象出版社, 1995.
- [7] 刘式适. 非线性大气动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [8] 吴忠良. 地震震源物理中的临界现象[M]. 北京: 地震出版社, 2000.
- [9] 陈颢, 陈凌. 分形几何学[M]. 北京: 地震出版社, 2005.
- [10] 李后强, 汪富泉. 分形理论及其在分子科学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [11] 谢和平. 分形 - 岩石力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [12] 凌复华译. 灾变理论入门[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983.
- [13] 谢应齐, 曹杰. 非线性动力学数学方法[M]. 北京: 气象出版社, 2001.
- [14] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1992.
- [15] 丑纪范, 刘式达, 刘式适. 非线性动力学[M]. 北京: 气象出版社, 1994.
- [16] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础[M]. 沈阳: 东边师范大学出版社, 1994.
- [17] 谢应齐, 曹杰. 非线性动力学数学方法[M]. 北京: 气象出版社, 2001.
- [18] 冯长根, 李后强, 祖元刚等. 非线性科学的理论、方法和应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [19] E. N. 洛伦兹, 刘式达, 刘式适, 严中伟译. 混沌的本质[M]. 北京: 气象出版社, 1997.
- [20] 吴祥兴, 陈忠. 混沌学导论[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1996.
- [21] 宋毅, 何国祥. 耗散结构论[M]. 北京: 中国展望出版社, 1986.
- [22] 李如生. 非平衡态热力学和耗散结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986.
- [23] 赵松年, 于允贤. 突变理论及其在生物医学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [24] 吴大进, 曹力. 协同学原理和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.
- [25] Carmeliet J, Abeel K V D. Poromechanical approach describing the moisture influence on the non-linear quasi-static and dynamic behaviour of porous building materials. Materials and Structures, Vol. 37, No. 4, 271 ~ 280. 2004.

- [26] Craft T J, Iacovides H, Yoon J H. Progress in the Use of Non - Linear Two - Equation Models in the Computation of Convective Heat - Transfer in Impinging and Separated Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 63, No. 4, 59 ~ 80. 1999.
- [27] Bart De Maerschalek, Marc I. Gerritsma. Higher - Order Gauss - Lobatto Integration for Non - Linear Hyperbolic Equations. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 27, No. 3, 201 ~ 214. 2006.
- [28] Schreiber F A, Baiguera M, Bortolotto G, Caglioti V. A study of the dynamic behaviour of some workload allocation algorithms by means of catastrophe theory. *Journal of systems Architecture*, Vol. 43, 605 ~ 624. 1997.
- [29] Liguos X, Ioannidis G, Kounadis A N. Non - linear buckling of simple models with titled cusp catastrophe. *International Journal of non - linear mechanics*, Vol. 38, 1163 ~ 1172. 2003.
- [30] Sinha S C. On the analysis of time - periodic nonlinear dynamical systems. *Sadhana*, Vol. 22, No. 3, 411 ~ 434. 1997.
- [31] 秦四清. 初论岩体失稳过程中耗散结构的形成机制[J]. *岩石力学与工程学报*, 2000, 19(3): 265 ~ 269.
- [32] 秦四清. 斜坡失稳过程的非线性演化机制与物理预报[J]. *岩土工程学报*, 2005, 27(11): 1241 ~ 1248.
- [33] Qin Siqing, Jiao Jiu Jimmy, Wang Sijing. A Nonlinear Catastrophe Model of Instability of Planar - slip Slope and Chaotic Dynamical Mechanisms of Its Evolutionary Process [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 38: 8093 ~ 8109. 2001.
- [34] 龙辉, 秦四清, 万志清. 降雨触发滑坡的尖点突变模型[J]. *岩石力学与工程学报*, 2001, 21(4): 502 ~ 508.
- [35] 龙辉, 秦四清, 朱世平等. 滑坡演化的非线性动力学与突变分析[J]. *工程地质学报*, 2001, 9(3): 332 ~ 335.
- [36] 秦四清. 斜坡失稳的突变模型与混沌机制[J]. *岩石力学与工程学报*, 2000, 19(4): 186 ~ 492.
- [37] 胡广钢等. 斜坡动力学[M]. 北京: 地质出版社, 1995.
- [38] 房营光. 土质边坡失稳的突变性分析[J]. *力学与实践*, 2004, 26(4): 24 ~ 27.
- [39] 杨永波, 刘明贵. 滑坡预测预报的研究现状与发展[J]. *土工基础*, 2005, 19(2): 61 ~ 65.
- [40] 吴忠良, 蒋长胜. 近期国际地震预测预报研究进展的几个侧面[J]. *中国地震*, 2005, 21(1): 103 ~ 112.
- [41] 黄润秋, 许强等. 突变理论在工程地质中的应用[J]. *工程地质学报*, 1993, 1(01): 65 ~ 73.
- [42] 梅国雄, 辛金珉. 现场检测时分析中的土压力计算公式[J]. *土木工程学报*, 2000, 33(5): 79 ~ 82.
- [43] 梅国雄, 辛金珉. 考虑变形的朗肯土压力模型[J]. *岩石力学与工程学报*, 2001, 20(6): 851 ~ 853.
- [44] 秦四清, 李晓. 非线性库仑主动土压力分析理论[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, 25(12): 2399 ~ 2406.
- [45] 殷有泉, 朴静. 地震过程的燕尾突变模型[J]. *地震学报*, 1994, 16(4): 416 ~ 422.
- [46] 苗天德. 湿陷性黄土变形机理与本构关系[J]. *岩土工程学报*, 1999, 21(4): 383 ~ 387.
- [47] 高国瑞. 黄土湿陷变形的结构理论[J]. *岩土工程学报*, 1990, 12(4): 1 ~ 10.
- [48] 黄润秋, 许强. 斜坡失稳时间的协同预测模型[J]. *山地研究*, 1997, 15(1): 7 ~ 12.
- [49] 左字军, 李夕兵, 赵国彦. 洞室层裂屈曲岩爆的突变模型[J]. *中南大学学报*, 2005, 36(2): 311 ~ 316.
- [50] 李荣强. 突变理论在顺层边坡稳定分析中的应用[J]. *同济大学学报*, 1993, 21(3): 380 ~ 386.
- [51] 刘钧. 顺层边坡弯曲破坏的力学分析[J]. *工程地质学报*, 1997, 5(4): 326 ~ 329.
- [52] 芮孝芳, 刘方贵, 邢贞相. 水文学的发展及其所面临的若干前沿科学问题[J]. *水利水电科技进展*, 2007, 27(1): 75 ~ 79.
- [53] 李天斌. 滑坡实时跟踪预报概论[J]. *中国地质灾害与防治学报*, 2002, 13(4): 17 ~ 22.
- [54] 李天斌. 滑坡预报的几个基本问题[J]. *工程地质学报*, 1999, 7(3): 200 ~ 206.
- [55] 余宏明, 胡艳欣. 滑坡位移动实时跟踪预测[J]. *地质科技情报*, 2001, 20(2): 83 ~ 86.
- [56] 秦四清, 张俤元, 黄润秋. 滑坡灾害预报的非线性动力学方法[J]. *水文地质与工程地质*, 1993, 20(5): 1 ~ 4.
- [57] 廖小平. 滑坡破坏时间预报新理论探讨[J]. *地质灾害与环境保护*, 1994, 5(3): 25 ~ 29.
- [58] 徐峻岭, 廖小平. 黄茨大型滑坡的预报及其理论和方法[J]. *中国地质灾害与防治学报*, 1996, 7(3): 18 ~ 25.
- [59] 桂立铭, 廖小平. 滑坡位移动态遥测系统在滑坡预报中的应用[J]. *路基工程*, 1997, (4): 1 ~ 5.
- [60] 文宝萍. 滑坡预测预报研究现状与发展趋势[J]. *地学前缘*, 1996, 3(1): 89 ~ 92.
- [61] 黄润秋, 许强. 斜坡失稳时间的协同预测模型[J]. *山地研究*, 1997, 15(1): 7 ~ 12.
- [62] 许强, 黄润秋. 斜坡演化的自组织特征初探[J]. *中国地质灾害与防治学报*, 1997, 8(1): 7 ~ 11.

## 第二章 岩土介质变形的应力应变模式与极限状态分析理论

### 第一节 岩土介质应力应变曲线模式

在力学计算和数值模拟中，常用的岩土介质应力应变曲线模式如图 2-1 所示。对岩土材料而言，刚塑性模式是不存在的，应用它仅仅是为了简化计算，如刚体极限平衡方法就采用了这种模式作为它的理论基础。在单轴和三轴试验中，试验得出的应力应变曲线多为弹塑性(应变硬化)模式或应变软化模式，其中理想弹塑性模式是弹塑性模式的一种简化。土体剪切试验中，土体的剪缩破坏对应着应变软化模式，为突然性破坏；土体的剪胀破坏对应着应变硬化模式，一般为逐渐破坏。

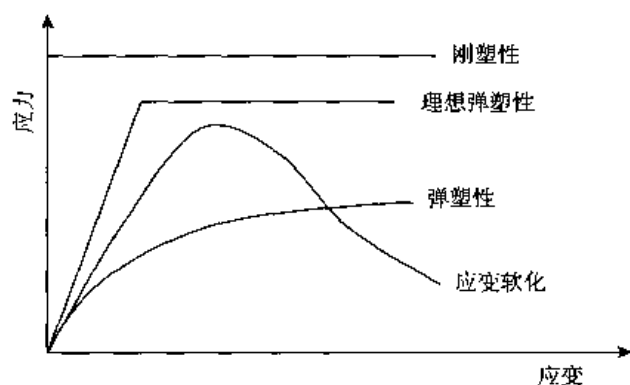


图 2-1 岩土介质典型应力应变曲线

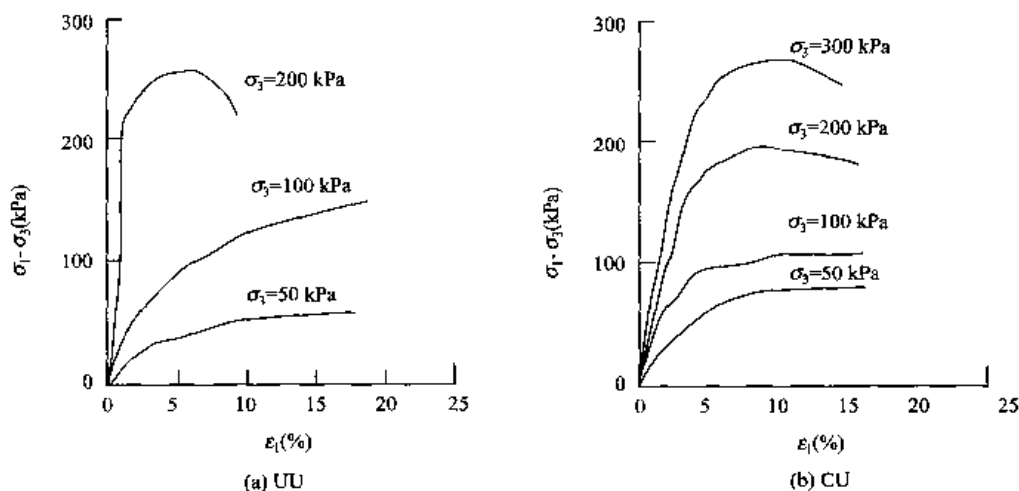


图 2-2 粉土三轴 UU 和 CU 试验的差应力与轴向应变曲线<sup>[1]</sup>



岩土介质的应力应变曲线模式取决于应力水平、排水条件、饱和状态、密实程度、材料类型等，呈现出弹塑性(应变硬化)与应变软化属性等。在不同的围压条件下，即使对同一种介质，其力学属性也可能完全不同(如图2-2所示)。从图2-3可看出，密实的砂具有应变软化属性，而疏松的砂具有弹塑性(应变硬化)行为。

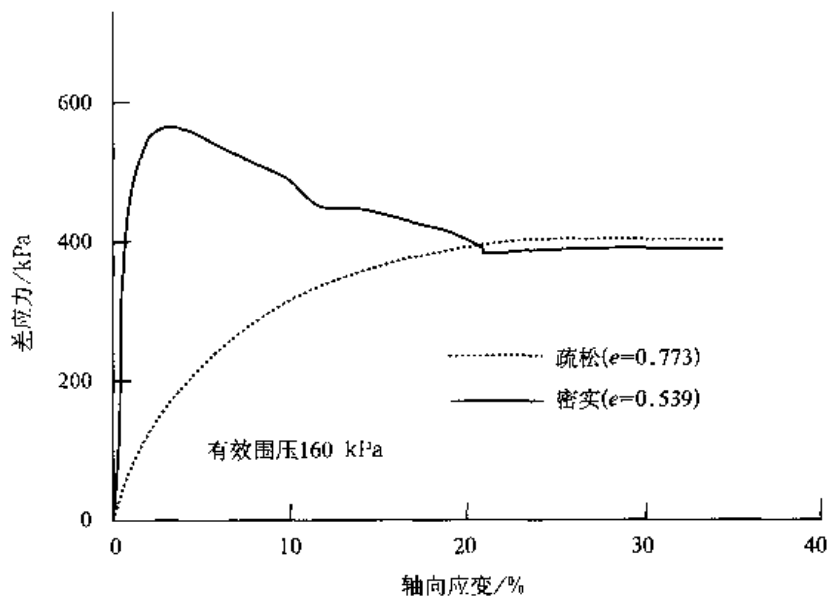


图 2-3 疏松和密实的 sandboil 砂排水试验结果<sup>[2]</sup>

## 第二节 断续岩石节理(岩桥)的破坏与剪切行为

一般认为，岩石在剪断时会产生突然的应力降，而后随剪切变形的增大，抗剪应力降低为残余强度，并保持不变(图2-4)。这种观点虽简化了力学计算，但确与实际情况不符。Gehle and Kutter<sup>[3]</sup>应用自行研制的伺服控制剪切试验机，对含有一组雁列节理的石膏和灰岩试样(图2-5)，进行了详细的实验研究(图2-6)。研究发现对这样节理组合的试样，其破坏前的剪切应力-位移关系一般能够被假定为线性的；当翼形裂纹形成导致岩桥

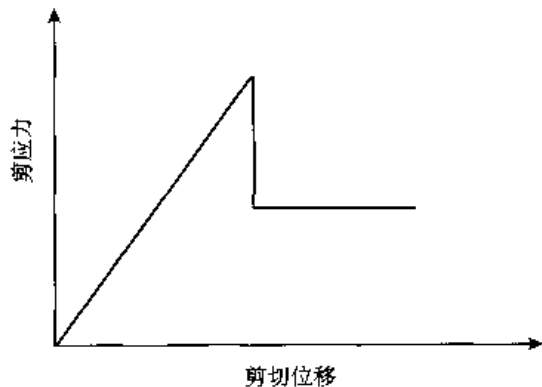


图 2-4 岩石剪切破坏的脆性行为

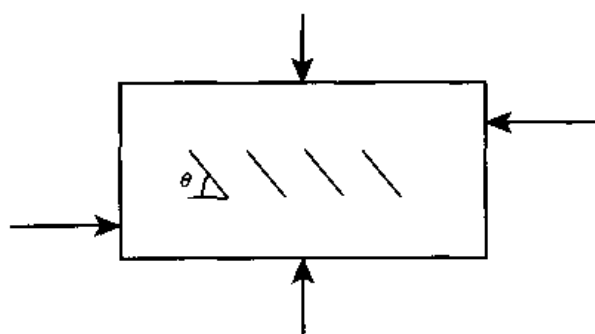


图 2-5 含有不连续节理的剪切试样

连通破坏时(图 2-7)，一个突然的应力降将产生；岩桥破坏后，内部裂缝的组合可能形成一条台阶状或锯齿状的贯通的不连续面(图 2-8)，随位移增加将导致慢速(有时快速，参见 Lajtai<sup>[4]</sup>)的应力增长而不是应力减小；在不规则的不连续面被磨平后，随着位移的增长，应力可能快速降低；以后的剪切行为将受滑面岩粉的性质控制。

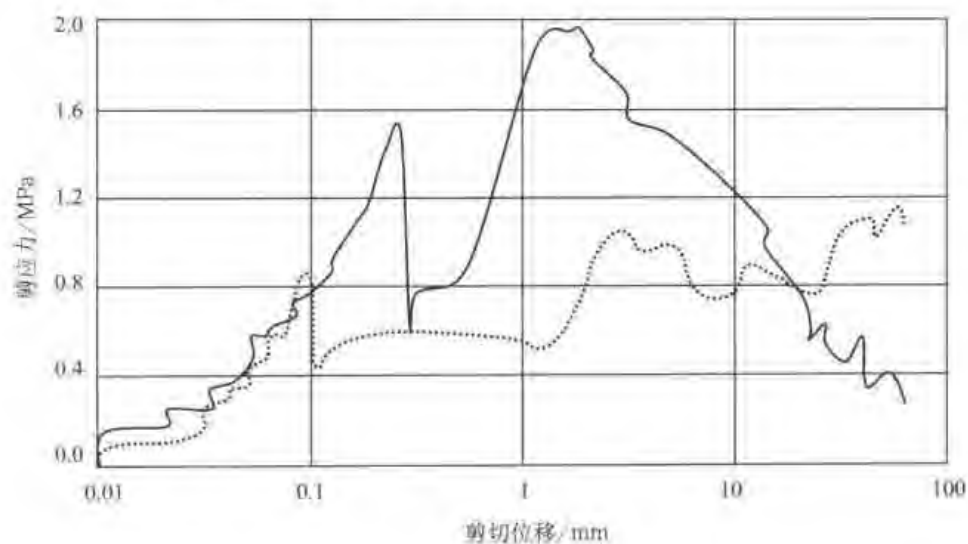


图 2-6 法向应力为 1 MPa 时，两个不同的测试记录<sup>[3]</sup>

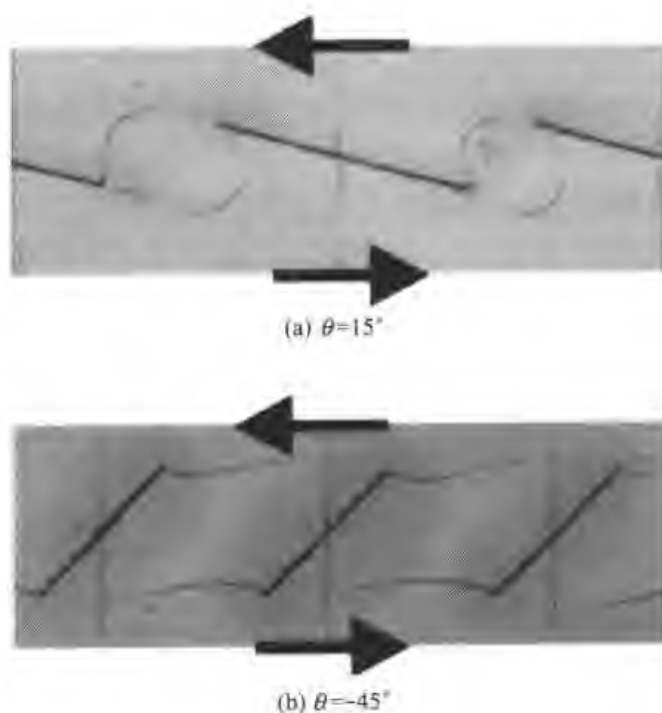


图 2-7 翼形裂纹生长<sup>[3]</sup>

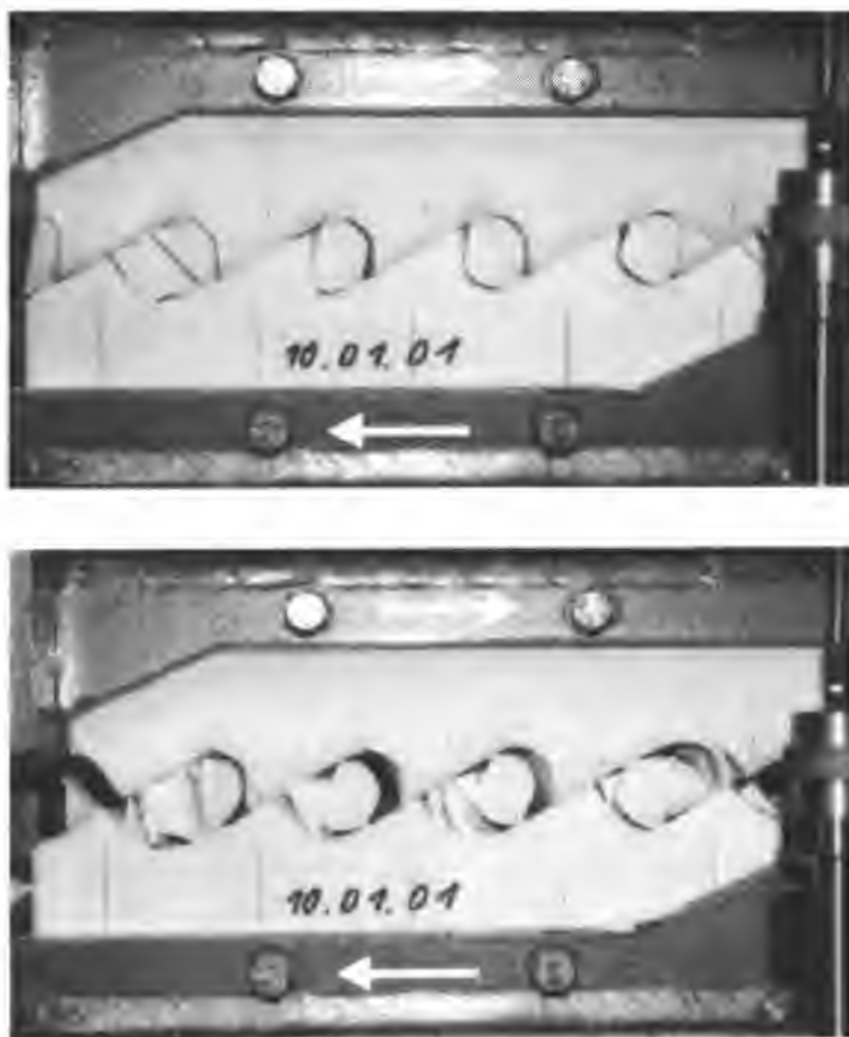


图 2-8  $\theta=30^\circ$  不规则滑动面的形成<sup>[3]</sup>

### 第三节 结构性土体的弹塑性损伤本构模型

土体的结构性，是指土体颗粒与孔隙的性状和排列形式(或称组构)以及颗粒之间的相互作用。绝大多数天然土都有一定的结构性<sup>[5]</sup>，这种结构性对土的工程性质有强烈的影响<sup>[6]</sup>。沈珠江<sup>[7]</sup>率先把损伤力学应用于土体，认为天然结构性土的逐渐破损，是从原状土逐渐向扰动土的变化过程，之后提出了结构性黏土的弹塑性损伤模型，并进行了平面固结计算。蒋明镜等<sup>[8]</sup>提出了结构吸力模型，研究了模型参数的测定方法，进行了一系列常规试验与非常规试验，并与数值模拟进行了对比，表明该模型能同时反映“硬化”与“软化”应力应变关系特点，以及不同应力路径下土体的结构破损特点。何开胜等<sup>[9]</sup>研究表明，天然黏土的压缩曲线可以分为3个阶段：①土的结构保持完好状态下的变形，基本上是弹性变形；②结构大量破损，这时除了颗粒之间的滑移以外，还伴随着结构的塌陷，其压缩性可能远高于重塑土的压缩性；③土的性质已接近重塑土，颗粒之间的滑移成为变形的主要原因。对于第二阶段的滑移，应使用黏塑性模型来描述；土的结构破损和塌陷，

应使用损伤模型来描述。对于第三阶段的重塑土变形，可用传统的弹塑性模型来描述。

应用黏弹塑性模型研究土体的力学行为，已做过大量的研究。在土的损伤模型研究中，对损伤变量多采用指数函数，但该函数仅反映应力损伤而未反映扰动损伤。考虑到土的结构破损和塌陷多为随机事件，一般服从某种概率分布，如果引入统计损伤力学理论，将可解决该问题。从微观结构性指标、微观结构性模型着手，结合力学理论和土工试验，最终可建立宏观力学模型。

#### 第四节 岩土介质变形破坏的极限状态

当系统由单一介质组成，且其具有应变软化或理想弹塑性性质时，其极限承载能力由应力应变曲线的峰值强度确定，极限承载能力等于强度值；当其具有应变硬化性质时，其承载能力随变形增长而增长，在有限变形范围内，其极限状态将难以确定。如果随变形增长，应力趋于某个极限值，其极限状态亦能确定。

当系统由具有不同应力应变属性的介质组成时，情况将变得复杂。如图 2-9 所示，当系统为串联系统且介质 1 和 2 都为应变软化介质时，强度低的介质首先破坏，此时系统将发生快速卸载，系统承载能力由强度低的介质决定。



图 2-9 单轴压缩时的串联系统

当系统为并联系统时(图 2-10)，则对两种介质同为应变软化介质(或一种为应变软化介质而另一种为理想弹塑性介质)，且当在某一变形时两种介质同时达到峰值强度的情况，系统承载能力为两者剪切强度之和，系统极限状态可以确定；对除此之外的情况，系统的承载能力或极限状态将难以确定，这说明强度理论有其局限性，需发展新的分析理论解决该问题。

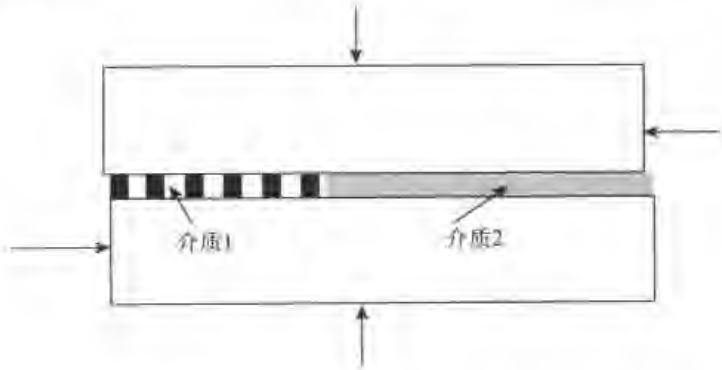


图 2-10 剪切滑移面由两种介质组成时的并联系统

## 第五节 刚体极限平衡方法、强度准则与刚度判据

在斜坡稳定性分析中常用的刚体极限平衡法采用了滑面介质为刚塑性的假设,这与试验资料和斜坡变形的实际情况不符。例如对平面滑动斜坡而言,软弱滑面上覆岩体可看作刚体,刚体的本构关系可假设为刚塑性,但滑面介质的抗剪应力与蠕滑位移有关,不是常数,不能采用刚塑性假设。因此,抗滑力是一与变形有关的变量,安全系数与斜坡沿滑面的位移有关,不是常量。

更重要的是,该法仅适用于滑动面介质为单一介质且具有应变软化或理想弹塑性属性的情况,或适用于多种介质同时达到峰值强度的情况,否则极限抗滑力无法计算。而实际滑动面可能由多种介质组成,如弹脆性、弹塑性、应变软化与应变硬化等,也不可能同时达到峰值强度。因此,该法的可靠性值得怀疑。

由前所述,强度准则对串联系统基本适用,而对并联系统则存在许多问题。从岩石单轴伺服控制试验和刚性试验机试验知道,岩石的破坏与本身强度有关,但破坏的猛烈程度则与试验机的刚度有关。可以推断,强度准则只适用于介质的缓慢破坏,而对猛烈的破坏,如岩爆、地震等并不适用,在多种情况下,只是失稳的必要条件。

## 第六节 应变软化介质的 Weibull 本构模型

对具有应变软化属性的介质,秦四清等<sup>[10]</sup>曾采用负指数模型描述它的本构关系,这里我们采用一种更为普遍的 Weibull 分布模式,即

$$\tau = G_0 \frac{u}{h} \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] \quad (2-1)$$

式中,  $G_0$  为初始剪切模量;  $u_0$  为平均应变的测度;  $m$  为曲线形状参数,它的物理意义是局部强度变化的测度,称为均匀性指标。 $m$  越大,材料的均匀性及脆性程度越大,其应变软化性质越明显(图 2-11),我们也可称  $m$  为脆性指标。

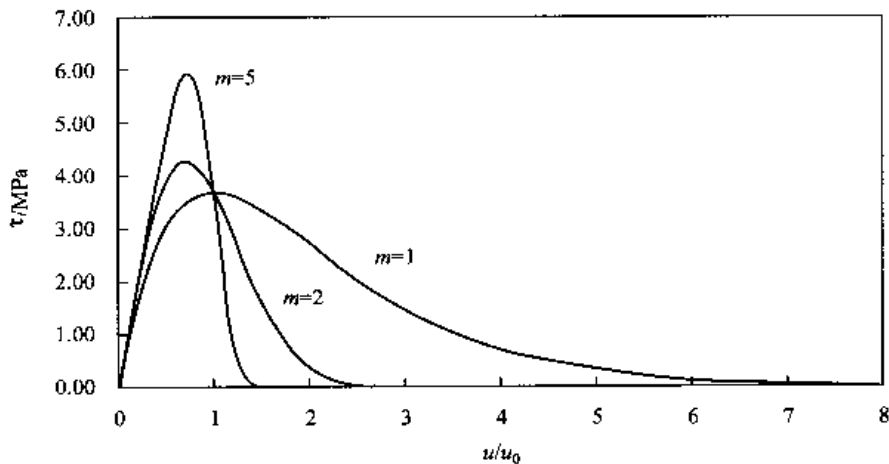


图 2-11 不同  $m$  值的应变软化介质的本构曲线 ( $G_0 = 10 \text{ MPa}$ ,  $u_0 = 0.1 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ )

对式(2-1)求导容易求得峰值强度对应的位移值为

$$u_p = u_0 \left( \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2-2)$$

其对应的峰值强度为

$$\tau_p = \frac{G_s u_0 \left( \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{m}} \exp \left( -\frac{1}{m} \right)}{h} \quad (2-3)$$

对式(2-2)求导可得到本构曲线拐点处的位移值为

$$u = \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{1}{m}} u_0 \quad (2-4)$$

以上三式是以后分析中经常用到的重要公式。

## 第七节 岩土介质剪切变形过程的非线性力学模型与极限状态分析理论

根据一组在不同法向应力下的剪切试验,应用莫尔-库仑准则可确定抗剪强度。这种方法只适用于剪切面为单一介质的情况。当剪切面由具有不同应力应变属性的介质组成时,根据现有的强度理论难以确定介质破坏极限状态,莫尔-库仑准则不再适用,这需要发展新的极限状态确定理论。

突变理论是 Thom<sup>[11]</sup>发展的一种用于模拟不连续突变现象的数学技术,实际上也是一种求系统极值的理论,已在岩土力学的诸多方面得到了应用。当土体从弹塑性变形状态进入临界破坏状态时是一种状态突变行为,可以用突变理论进行研究,用它可以计算具有不同应力应变属性的剪切面介质,当其进入临界破坏状态时所需的力学条件。

### 一、尖点突变模型

如图 2-12 所示,作用在滑块上的力有法向力  $N$ ,推力  $P$ 。假定剪切面由两种不同力学属性的介质组成,一种为具有应变硬化属性的介质,另一种为具有应变软化属性的介质,  $l_h$  和  $l_s$  分别为其长度。为简化分析,假定滑块为刚体,这样可不考虑滑块内部的应力和变形条件。

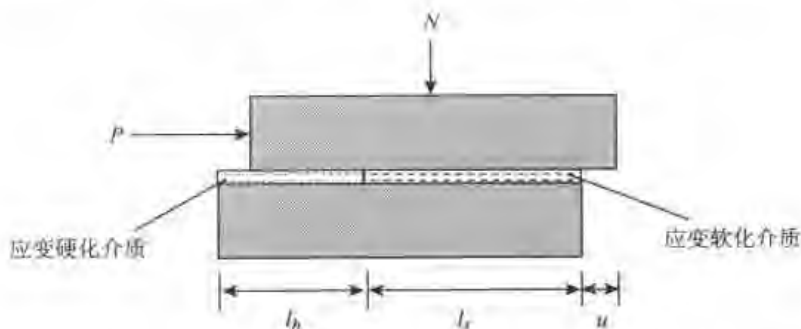


图 2-12 剪切面由应变硬化介质与应变软化介质组成的力学模型

如图 2-13 所示, 设剪切面的厚度均匀, 为简化分析, 应变硬化介质的本构模型被假定为

$$\tau = \begin{cases} \frac{G_1 u}{h} & (0 \leq u \leq u_h) \\ \tau_h + \frac{G_2 (u - u_h)}{h} & (u > u_h) \end{cases} \quad (2-5)$$

式中,  $h$  为剪切面的厚度;  $u_h$  是应变硬化开始点的位移;  $\tau_h$  是  $u_h$  对应的抗剪应力;  $G_1$  和  $G_2$  分别为应变硬化介质对应  $0 \leq u \leq u_h$  和  $u > u_h$  的剪切模量。

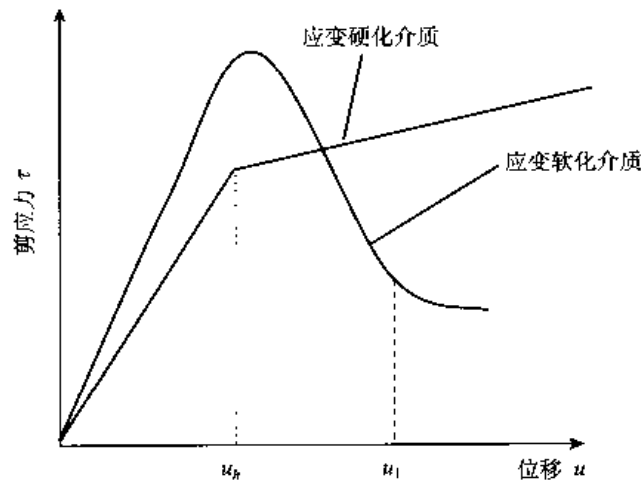


图 2-13 剪切面两种不同介质的本构曲线

对应变软化介质, 可采用式(2-1)的 Weibull 本构模型。

设滑块沿剪切面的位移为  $u$ , 假定  $l_h$  和  $l_s$  远大于  $u$ , 并在剪切过程中保持不变, 则剪切系统的总势能  $V$  可表达为

$$V = \begin{cases} \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s w \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^u \frac{G_1 u}{h} l_h w du - Pu, (u \leq u_h) \\ \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s w \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^{u_h} \frac{G_1 u}{h} l_h w du + \int_{u_h}^u \left[\tau_h + \frac{G_2 (u - u_h)}{h}\right] l_h w du - Pu, (u > u_h) \end{cases} \quad (2-6)$$

式中,  $h$  为剪切面的厚度;  $w$  为滑块的横向宽度。

令  $dV/du = 0$ , 可得:

$$V' = \begin{cases} \frac{G_s u}{h} l_s w \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_1 u}{h} l_h w - P = 0, (u \leq u_h) \\ \frac{G_s u}{h} l_s w \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_2 u}{h} l_h w + \left(\tau_h - \frac{G_2 u_h}{h}\right) l_h w - P = 0, (u > u_h) \end{cases} \quad (2-7)$$

上式显然是力的平衡条件, 在突变理论分析中称为平衡曲面。根据平衡曲面的光滑性质, 由  $V'' = 0$ , 可求得尖点, 即

$$u_1 = u = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} u_0 \quad (2-8)$$

容易知道尖点处位移值, 恰为剪切面应变软化介质本构曲线拐点处的位移值。

将平衡曲面方程(2-7)相对于尖点处状态变量值  $u_1$  作 Taylor 展开, 截取至 3 次项, 并作变量代换可得到尖点突变<sup>[11]</sup>模型的标准形式:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (2-9)$$

其中:

$$x = \frac{u - u_1}{u_1} \quad (2-10)$$

$$a = \frac{6}{(m+1)^2}(k-1) \quad (2-11)$$

$$b = \frac{6}{m(m+1)^2}(mk+1-\xi) \quad (2-12)$$

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \quad (2-13)$$

$$\xi = \begin{cases} \frac{Ph \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s w u_1}, & (u_h \geq u_1) \\ \frac{\left[P - \left(\tau_h - \frac{G_h u_h}{h}\right) l_h w\right] h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s w u_1}, & (u_h < u_1) \end{cases} \quad (2-14)$$

式中,  $G_h = G_1 (u_h \geq u_1)$  或  $G_h = G_2 (u_h < u_1)$ 。参数  $k$  为剪切面应变硬化介质的剪切刚度 ( $k_h = G_h l_h / h$ ), 与对应于本构曲线拐点处、应变软化介质的剪切刚度的绝对值 ( $k_s = |m G_s l_s \exp[-(m+1)/m]| / h$ ) 之比, 称之为刚度比; 参数  $\xi$  与推力、系统的几何尺寸及介质的力学参数等有关, 称为几何-力学参数。

在满足(2-9)式的力的平衡条件中, 为求得  $P$  的极小值, 可对  $x$  求导得到

$$3x^2 + a = 0 \quad (2-15)$$

联立式(2-9)和(2-15)消去  $x$ , 得到

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 4\beta^3(k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2(1+mk-\xi)^2 = 0 \quad (2-16)$$

式中,  $\beta = 6/(m+1)^2$ 。

方程(2-16)在突变理论分析中称为分岔集方程。当式(2-16)满足时, 表示滑动面介质整体上进入了临界破坏状态, 达到了极限平衡要求, 此时  $P$  值为所求最小推力。方程(2-16)称为达到极限状态的充要条件。

## 二、系统达到极限状态的必要条件

由式(2-16)知, 只有当  $k \leq 1$  时, 分岔集方程才有可能满足, 因此, 系统达到极限状态的必要条件为

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq 1 \quad (2-17)$$

由式(2-17)知, 在其他参数不变的情况下,  $k$  随  $m$  的增大而减小。 $m$  值越大(刚度比越小), 即材料的均匀性越高, 越易达到极限状态。



我们可以对  $k$  值越小, 土体越易进入临界破坏状态的原因作如下解释。当  $k$  较小时, 应变软化介质的峰后曲线较陡, 在峰后强度某个变形增量  $\Delta u$  时, 其承担的剪切应力下降很大, 应变硬化介质将承担更大的剪切应力而进入临界破坏状态, 这样滑移面介质整体上进入了破坏状态。

显然, 只有变形进入应变软化介质的峰后变形阶段时, 才可能有  $k \leq 1$ , 这说明强度准则只是判别介质进入临界破坏状态的必要条件之一。

由式(2-15)可解得达到临界破坏状态时的临界位移值

$$u_b = u_1 \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{m+1} (1-k)^{1/2} \right], (k < 1) \quad (2-18)$$

当  $k=1$  时,  $u_b = u_1$ ; 当  $k=0$  时,  $u_b = u_1 [1 - 1.4142/(m+1)]$  (要求  $m \geq 0.4142$ )。可看出随  $k$  减小, 系统达到极限状态所需的临界位移减小。容易证明,  $u_b$  是介于应变软化介质峰值强度对应的位移与拐点位移之间。

### 三、与经典强度准则的比较

为与经典强度准则进行比较, 考虑土体仅由一种应变软化介质组成, 即  $l_h = 0, k = 0$ , 由式(2-16)和式(2-14)得到极限破坏状态时, 极限剪切应力的表达式为

$$\tau_f = \frac{P}{l_s w} = \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} + 1 \right) \frac{G_s u_0 \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{1}{m}}}{\exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}, (b < 0) \quad (2-19)$$

比较式(2-19)与式(2-3), 得到:

$$\frac{\tau_f}{\tau_p} = f(m) \quad (2-20)$$

式中,  $f(m) = \left[ \frac{(m+1)^{\frac{1}{m}}}{e} \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} \right) \right]$ ;  $e$  为自然指数。

在  $m$  可能的取值范围内 ( $0.4142 \leq m \leq 3$ ),  $f(m)$  的变化范围是  $1.09 \sim 0.997$ ,  $f(m)$  为接近 1 的常数。从式(2-7)知道,  $f(m)$  应恒等于 1,  $f(m)$  不等于 1 的原因是在对式(2-7)做 Taylor 展开时进行了截断处理。这样, 式(2-20)可进一步写为

$$\tau_f \approx \tau_p \quad (2-21)$$

上式说明, 当剪切面介质为单一应变软化属性介质时, 求得的极限破坏剪切应力与峰值剪切强度等效。可见强度准则只是非线性极限状态分析理论的特例。

### 四、应变硬化属性介质与应变软化属性介质协同作用的极限状态分析新理论

实际上, 方程(2-16)蕴涵着两种不同的极限状态模式, 现分述如下。

**模式一:** 当应变软化介质的承载力远大于应变硬化介质时, 系统的极限状态将主要由应变软化介质的属性控制(图 2-14(a))。当  $u_h \geq u_1$  时,  $G_h = G_1$ , 由式(2-16)和式(2-14)可得到其极限承载力表达式( $b < 0$ )为

$$P_{\max}^I = \frac{G_s l_s u_1 w}{\exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ 1 + mk + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (2-22)$$

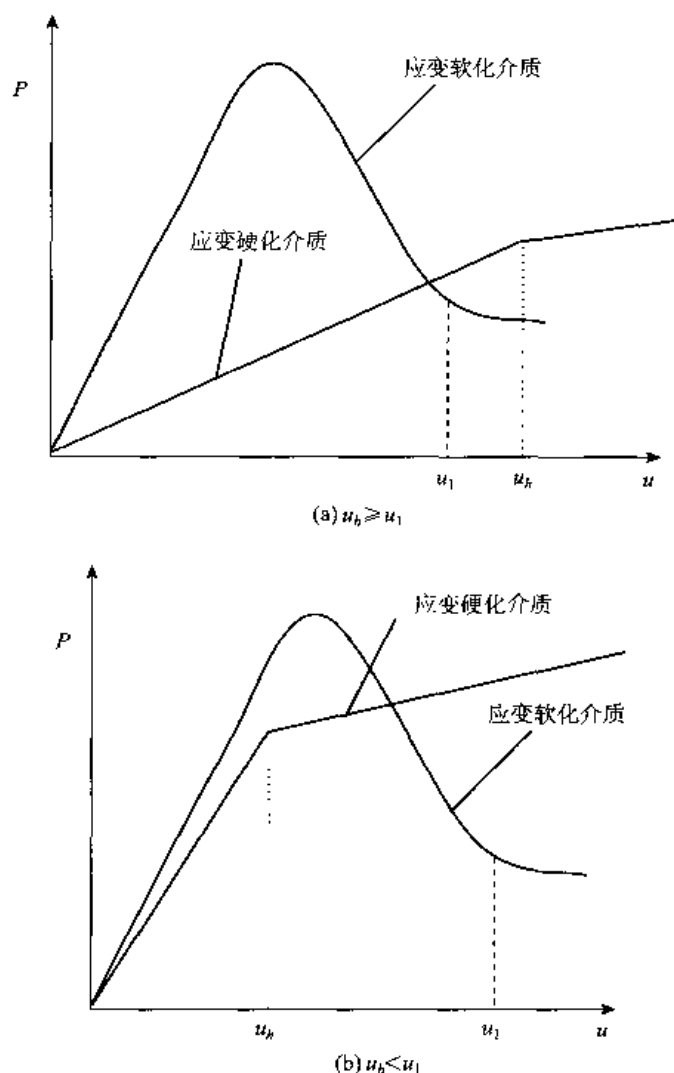


图 2-14 两种不同极限状态的  $P-u$  曲线

**模式二：**当系统的承载力由应变软化介质与应变硬化介质共同承担时，系统的极限状态将主要由两种介质的属性共同控制(图 2-14(b))。当  $u_h < u_1$  时， $G_h = G_2$ ，由式(2-16)和式(2-14)可得到其极限承载力表达式( $b < 0$ )为

$$P_{\max}^2 = \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h w + \frac{G_s l_s u_1 w}{h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ 1 + mk + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2-23)$$

极限剪切应力的一般表达式为

$$\tau_{\max} = \begin{cases} \frac{P_{\max}^1}{(l_s + l_h)w}, & (u_h \geq u_1) \\ \frac{P_{\max}^2}{(l_s + l_h)w}, & (u_h < u_1) \end{cases} \quad (2-24)$$

可看出极限承载力或极限剪切应力除与滑块几何尺寸、剪切模量等有关外，还与刚度比  $k$  和材料均匀性指标  $m$  有关，这说明极限剪切应力由系统本身的几何特征与力学特性

决定。由式(2-22)可确定其极限剪切状态对应的应力。极限状态与介质的应力应变属性及本构曲线的具体型式密切相关。我们把基于不同力学属性介质协同作用确定极限剪切应力的分析方法,称之为极限状态分析理论。

为研究极限剪切应力  $\tau_{\max}$  随  $m$  值的变化规律,令  $l_h=0.8\text{ m}$ ,  $l_s=0.4\text{ m}$ ,  $\tau_h=100\text{ kPa}$ ,  $u_0=0.02\text{ m}$ ,  $h=0.1\text{ m}$ ,  $u_h=0.05\text{ m}$ ,  $G_h=50\text{ kPa}$ ,  $G_s=4000\text{ kPa}$ , 可得到  $\tau_{\max}-m$  和  $k-m$  的关系(图 2-15)。

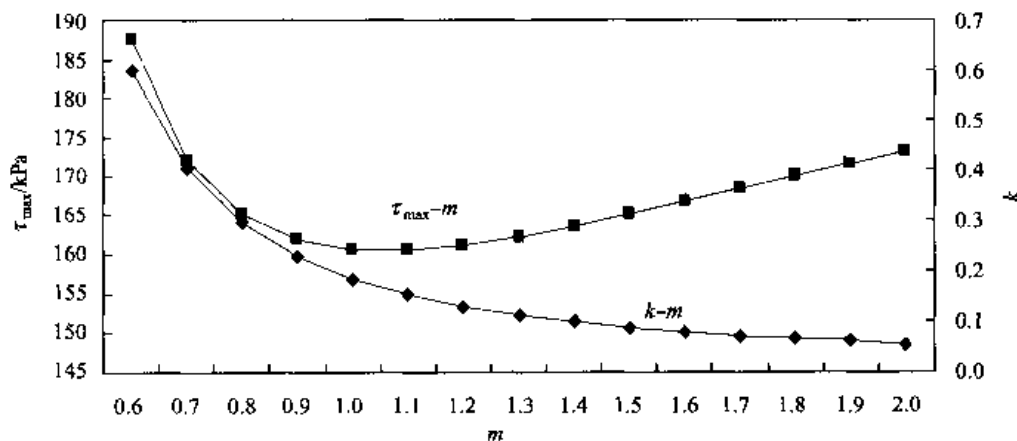


图 2-15  $\tau_{\max}-m$  和  $k-m$  关系

从图 2-15 可看出,随  $m$  值的增大,刚度比  $k$  减小,在  $m < 1$  时,  $\tau_{\max}$  随  $m$  值的增大而减小;在  $m = 1$  时达到最小值,而后随  $m$  值的增大  $\tau_{\max}$  增大。

## 参 考 文 献

- [1] 王成华,李广信. 土体应力-应变关系转型问题分析[J]. 岩土力学,2004,Vol. 25, No. 8, 1185 ~ 1190.
- [2] Gye Chun Cho. Unsaturated soil stiffness and post-liquefaction shear strength, PhD. Thesis, Georgia Institute of Technology, USA, 91. 2001.
- [3] Gehle C, Kutter H K. Breakage and shear behavior of intermittent rock joints[J]. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Vol. 40, 687 ~ 700. 2003.
- [4] Lajtai F Z. The influence of interlocking rock discontinuities on compressive strength (model experiments)[J]. Felsmech Ingenieurgeol, Vol. 5, 217 ~ 228. 1967.
- [5] Mesri G. Discussion[J]. J. Geotech. Engng. Div, ASCE. 101 (GT4): 409 ~ 412. 1975.
- [6] Leroueil S, Vaughan P R. The general and congruent effects of structure in natural soil and weak rock[J]. Geotechnique, Vol. 40, No. 3, 467 ~ 488. 1990.
- [7] 沈珠江. 结构性黏土的弹塑性损伤模型[J]. 岩土工程学报, 1993, Vol. 15, No. 3, 1 ~ 6.
- [8] Jiang Mingjing, Shen Zhujiang. A structural suction model for structured clays[A]. In: 2nd International Conference on Soft Soil Engineering[D], Nanjing, China. 231 ~ 247. 1996.
- [9] 何开胜,沈珠江. 结构性黏土的弹黏塑损伤模型[J]. 水利水运工程学报, 2002, Vol. 4, 7 ~ 13.
- [10] Siqing Qin, Jiu Jimmy Jiao, Sijing Wang. A Nonlinear Catastrophe Model of Instability of Planar-slip Slope and Chaotic Dynamical Mechanisms of Its Evolutionary Process[J]. International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, 8093 ~ 8109. 2001.
- [11] Thom, R. Stabilité structurelle et morphogénèse[M]. New York: Benjamin. 1972.

# 第三章 岩石变形的动力学 方程与序参量方程

## 第一节 引言

岩石在加载变形过程中,其内部裂纹成核、扩展、贯通及断裂的过程,都可以看作一个不可逆力学过程。其任何力学过程的转变实际上都是不可逆热力学转变。在研究岩石性质时,不仅要考虑力学参量(如应力 $\sigma$ 和应变 $\epsilon$ ),还必须考虑热力学参量(如温度 $T$ 、自由能 $F$ 、熵 $S$ ),因此,传统的单纯用力学观点和方法研究岩石的力学性质是不恰当的。

Bottani<sup>[1]</sup>是倡导用协同学方法研究金属力学性质的先行者。他们认为,金属性质的任何“力学”转变实际上都是不可逆热力学转变,当应变达到一定程度时,金属发生屈服、蠕变和断裂是一个自组织过程,因此,可用协同学的方法进行研究。

协同学<sup>[2]</sup>是由德国理论物理学家 Haken 于 1977 年创立的。它是一门研究远离平衡的系统,如何通过各子系统之间的自我组织产生时间、空间或功能结构的科学,其主要目标是寻找物质世界中千差万别现象的普适性规律。

协同学认为,影响系统演化的因素包括控制变量和状态变量两类。任何系统的演化过程中诸状态变量的变化一般均可用一组微分方程表示。微分方程中,状态变量的系数即为控制变量。即使最简单的系统,所包含的子系统的数目也十分庞大,表征子系统的状态变量数目也较多,要求解这种非线性微分方程组不是不可能就是难以做到。但是任何实际体系的演化结果一般都具有确定的结构,其演化过程应该用少数几个量便可描述。协同学的研究结果表明,出现上述现象的根本原因在于:为数众多的状态变量按其临界行为可分为慢变量和快变量。快变量数目巨大,但它对系统的演化所起的作用不大;慢变量虽数目较少,却控制着系统的演化进程。慢变量就是所谓的序参量。这就是协同学的支配原理。Haken 学派根据这一原理,运用绝热消去法消去快变量,从而得到慢变量的系统方程。

协同学处理自组织问题的程序大致分为三步:第一步,作线性稳定性分析,确定稳定模和不稳定模;第二步,使用支配原理消去稳定模,建立序参量方程;第三步,求解序参量方程,确定系统的宏观结构。

对岩石变形动力学方程的研究,目前进行的工作很少。本章根据文献[1],[2]提出的研究金属的方法,将协同学原理引入岩石力学。首先在同时考虑岩石的力学参量和热学参量的条件下,构造系统的动力学方程组;接着应用绝热消去技术建立序参量方程;最后对建立的序参量方程的稳定性与混沌性作了分析。

## 第二节 岩石变形的动力学方程

写出以温度  $T$  和应变  $\varepsilon$  为状态参量的自由能表达式  $F(T, \varepsilon)$  后, 可求得熵和状态方程, 再将它们代入熵平衡方程和动量平衡方程, 就可得到两个关于温度偏差  $\theta$  和应变  $\varepsilon$  的非线性耦合方程, 即协同学框架中的系统动力学方程组。

### 一、弹性岩石变形的自由能、熵和状态方程

用  $F(T, \varepsilon)$  代表岩石的自由能, 其中  $T$  为系统的温度,  $\varepsilon$  为系统的应变。将  $F(T, \varepsilon)$  在平衡态 ( $T = T_0, \varepsilon = 0$ ) 附近作 Taylor 展开, 得到:

$$F(T, \varepsilon) = F(T_0, 0) + \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_0 \theta + \left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_0 \varepsilon + \frac{1}{2!} \left\{ \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right|_0 \theta^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} \right|_0 \theta \varepsilon + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right|_0 \varepsilon^2 \right\} \\ + \frac{1}{3!} \left\{ \left. \frac{\partial^3 F}{\partial T^3} \right|_0 \theta^3 + 3 \left. \frac{\partial^3 F}{\partial T^2 \partial \varepsilon} \right|_0 \theta^2 \varepsilon + 3 \left. \frac{\partial^3 F}{\partial T^2 \partial \varepsilon} \right|_0 \theta \varepsilon^2 + \left. \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} \right|_0 \varepsilon^3 \right\} + \dots \quad (3-1)$$

由固体的热力学基本方程:

$$dF = -SdT + \sigma d\varepsilon \quad (3-2)$$

可得 ( $\sigma$  代表应力):

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -\frac{\partial S}{\partial T} = -\frac{C_V}{T}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial T^3} = \frac{\partial(-C_V/T)}{\partial T}; \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \sigma, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon}; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} / T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right) T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -C_V \gamma; \\ \frac{\partial^3 F}{\partial T^2 \partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} \right) = -\frac{\partial(\gamma C_V)}{\partial T}; \\ \frac{\partial^3 F}{\partial T \partial \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} \right) = -\frac{\partial(\gamma C_V)}{\partial \varepsilon}.$$

式中,  $\gamma = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} / T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$  为 Gruneisen 函数, 其物理意义是: 在等容条件下, 由于供给单位体积的热量  $C_V \Delta T / V$  而引起热机械压强的量度。

将以上各式代入式(3-1), 得到:

$$F(T, \varepsilon) = F(T_0, 0) - S(T_0, 0)\theta - \frac{1}{2} \frac{C_V}{T_0} \theta^2 - \gamma C_V \theta \varepsilon + \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \\ - \frac{1}{6} \frac{\partial(C_V/T)}{\partial T} \Big|_0 \theta^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial(\gamma C_V)}{\partial T} \Big|_0 \theta^2 \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial(\gamma C_V)}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \theta \varepsilon^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \varepsilon^3 \quad (3-3)$$

略去关于  $T$  的小量和  $\varepsilon$  的 3 次项, 上式可重新写为:

$$F(T, \varepsilon) = F(T_0, 0) - S(T_0, 0)\theta - \frac{1}{2} \frac{C_V}{T_0} \theta^2 - \gamma C_V \theta \varepsilon + \frac{1}{2} E \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial(\gamma C_V)}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \theta \varepsilon^2 \quad (3-4)$$

式中,  $F(T_0, 0)$  为未变形岩石在  $T_0$  局域平衡时的自由能;  $S(T_0, 0)$  为局域平衡时的熵密

度； $\frac{1}{2}E\varepsilon^2$  为热弹性能密度； $E$  为弹性模量； $\theta = T - T_0$  为温度偏差； $C_v$  为单位体积的定容热容量。

由式(3-4)可求得系统单位体积的熵和状态方程：

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_\varepsilon = S(T_0, 0) + \frac{C_v}{T_0} \theta + \gamma C_v \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial(C_v \gamma)}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \varepsilon^2 \quad (3-5)$$

$$\sigma_\varepsilon = \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_T = E\varepsilon - \gamma C_v \varepsilon - \frac{\partial \gamma C_v}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \theta \varepsilon \quad (3-6)$$

式(3-5)右边的第三和第四项代表由热应变引起的熵。式(3-6)中右边第一项代表虎克应力，第二和第三项代表热弹性应力。热弹性应力可看作由热力学不可逆性变化产生的(如裂纹产生、扩展、贯通等)，可视为塑性应力。

## 二、系统的动力学方程

在局域平衡假设下，可将熵平衡方程写为连续性方程的形式<sup>[3]</sup>：

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{T} \right) + P(S) \quad (3-7)$$

式中， $q$  为热流密度； $q/T$  为熵流密度； $P(S)$  为熵产生；根据其定义<sup>[3]</sup>有：

$$P(S) = q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\sigma_v}{T} \quad (3-8)$$

它表示熵产生，是热力学“力” $\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \right) \right)$ 和 $\left( \frac{\sigma_v}{T} \right)$ 和“流”(热流 $q$ 和应变速率 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ )乘积的线性叠加； $\sigma_v$ 代表耗散应力。

根据 Fourier 热传导定律，有：

$$q = -K \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3-9)$$

式中， $K$  为热传导系数。根据流变力学和岩石流变定义<sup>[4]</sup>， $\sigma_v$  可设为：

$$\sigma_v = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3-10)$$

式中， $\eta$  为黏滞系数。将式(3-5)、(3-9)和(3-10)一起代入熵平衡方程(3-7)，有：

$$\begin{aligned} \frac{C_v}{T_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma C_v \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + C_v \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{K}{T} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\eta}{T} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma T_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + T_0 \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{K}{C_v} \frac{T_0}{T} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\eta}{C_v} \frac{T_0}{T} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

取  $T_0/T \approx 1$ ，记： $\chi = \frac{K}{C_v}$  是热扩散系数，最后得到：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \gamma T_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - T_0 \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} \Big|_0 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\eta}{C_v} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2 \quad (3-11)$$

再考虑动量平衡方程：

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \quad (3-12)$$

有:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E\varepsilon - \gamma C_v \theta - \left. \frac{\partial \gamma C_v}{\partial \varepsilon} \right|_0 \theta \varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3-13)$$

式中,  $\sigma$  为热弹性应力  $\sigma_e$  与耗散性应力  $\sigma_v$  之和;  $E\varepsilon$  为弹性应力;  $-\gamma C_v \theta - \left. \frac{\partial \gamma C_v}{\partial \varepsilon} \right|_0 \theta \varepsilon$  为由不可逆热力学过程产生的塑性应力;  $\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$  为黏性应力。可看出上式为岩石变形的黏-弹-塑性本构方程。该方程的推导过程并没有假设岩石的变形性质, 而纯粹是从岩石变形过程是一不可逆力学过程的角度出发, 导出的包含弹性、塑性及黏性的岩石本构方程。

将式(3-13)代入式(3-12), 得到:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\gamma C_v}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\gamma C_v}{\gamma \rho} \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} \bigg|_0 \left\{ \theta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right\} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t \partial x^2}$$

考虑到  $v_s = (E/\rho)^{1/2}$  为声速;  $\gamma C_v = E\alpha$ ,  $\alpha$  为线膨胀系数;  $\gamma C_v/\rho = E\alpha/\rho = v_s^2 \alpha$ ; 上式最后化为:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + v_s^2 \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t \partial x^2} = -v_s^2 \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} \bigg|_0 \left\{ \theta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right\} \quad (3-14)$$

式(3-11)和式(3-14)构成系统的动力学方程组, 它们是温度偏差  $\theta$  和应变  $\varepsilon$  的非线性耦合方程。

### 第三节 序参量方程

在非阻尼临界模型  $\xi_c$  的方程中应用绝热消去技术, 经复杂的推导<sup>[1,2]</sup>, 最后得到序参量方程:

$$\frac{\partial \xi_c}{\partial t} - \lambda_c \xi_c = a \xi_c^3 + b \xi_c^{*3} + c |\xi_c|^2 \xi_c + d |\xi_c|^2 \xi_c^* \quad (3-15)$$

计算表明,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  都是复数, 且它们的虚部  $a''$ 、 $b''$ 、 $c''$  和  $d''$  远小于各自的实部  $a'$ 、 $b'$ 、 $c'$  和  $d'$ 。

将  $\xi_c$  分为实部和相因子, 即:

$$\xi_c(t) = R(t) e^{i\varphi(t)}; \quad \xi_c^*(t) = R(t) e^{-i\varphi(t)} \quad (3-16)$$

将式(3-16)代入式(3-15), 并注意到  $|\xi_c|$  是  $\xi_c$  的模  $R$ , 则式(3-15)化为:

$$R e^{i\varphi} \frac{dR}{dt} + i R e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{dt} - \lambda_c R e^{i\varphi} = a R^3 e^{3i\varphi} + b R^3 e^{-3i\varphi} + c R e^{3i\varphi} + d R^3 e^{-i\varphi} \quad (3-17)$$

两边同除以  $e^{i\varphi}$ , 得到:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} + i R \frac{d\varphi}{dt} - \lambda_c R &= a R^3 e^{2i\varphi} + b R^3 e^{-4i\varphi} + c R^3 + d R^3 e^{-2i\varphi} = a R^3 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \\ &+ b R^3 (\cos 4\varphi - i \sin 4\varphi) + d R^3 (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) + c R^3 \end{aligned} \quad (3-18)$$

分别考虑上式中的实部和虚部, 并用  $\alpha_c$  表示  $\lambda_c$  的实部,  $\omega$  表示  $\lambda_c$  的虚部, 则有:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha_c R + R^3 [(a' + d') \cos 2\varphi + b' \cos 4\varphi + c'] \quad (3-19)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + R^2[(a'' - d'')\sin 2\varphi - b''\sin 4\varphi + c''] \quad (3-20)$$

略去式(3-20)右边第二项, 得到:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (3-21)$$

将上式在许多周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  中求平均, 得到:

$$\overline{\varphi} = \text{const} \quad (3-22)$$

将式(3-22)代入式(3-19), 得到:

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \alpha_c \overline{R} - c_c \overline{R}^3 \quad (3-23)$$

其中  $c_c = -c'$ 。式(3-23)即为最后得到的简化序参量方程。

## 第四节 序参量方程的稳定性分析与混沌态判据

将式(3-23)写成差分形式, 有:

$$\overline{R}_{n+1} = (\alpha_c + 1) \overline{R}_n \left( 1 - \frac{c_c}{\alpha_c + 1} \overline{R}_n^2 \right) \quad (3-24)$$

令  $u = \alpha_c + 1$ ,  $x_n = \sqrt{\frac{c_c}{\alpha_c + 1}} \overline{R}_n$ , 并将其代入式(3-24), 得:

$$x_{n+1} = ux_n(1 - x_n^2) \quad (3-25)$$

下面根据 Lyapunov 动力学稳定性理论<sup>[5,6]</sup>, 对式(3-25)作一简要分析。

(1)  $0 < u < 1$

令  $x = ux(1 - x^2)$ , 得:

$$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{u-1}{u}} \quad (3-26)$$

因  $u < 1$ ,  $x_{2,3}$  为复根, 略去, 此时方程只有一个不动点  $x_f = x_1 = 0$ 。

令  $F_u(x) = ux(1 - x^2)$ , 由不动点的稳定性判据知:

$$\left| \frac{dF_u}{dx} \right|_{x_f} = u - 3ux^2 \Big|_{x_f} = u < 1 \quad (3-27)$$

故  $x_f = 0$  不动点是稳定的。其 Lyapunov 指数为:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) \ln \left| \sum_{i=0}^{n-1} F'_u(x_i) \right| = \ln u < 0 \quad (3-28)$$

故在  $0 < u < 1$  时, 系统运动具有周期性, 不出现混沌态。

(2)  $u = 1$

其不动点仍为  $x_f = 0$ , 但因:

$$\left| \frac{dF_u}{dx} \right|_{x_f} = u = 1 \quad (3-29)$$

$$\lambda = \ln u = \ln 1 = 0 \quad (3-30)$$

故此时,  $x_f$  退化为临界稳定状态, 且  $\lambda = 0$  对应稳定边界, 初始误差不放大也不缩小。



(3)  $1 < u < 2$

此时有两个不动点, 即

$$x_{f1} = 0, x_{f2} = \sqrt{\frac{u-1}{u}}, (\text{舍弃 } -\sqrt{\frac{u-1}{u}}) \quad (3-31)$$

因:

$$\left| \frac{dF_u}{dx} \right|_{x_{f1}} = u > 1 \quad (3-32)$$

$$\left| \frac{dF_u}{dx} \right|_{x_{f2}} = |3 - 2u| < 1 \quad (3-33)$$

所以,  $x_{f1}$  已成为不稳定不动点,  $x_{f2}$  为稳定不动点。这说明  $u$  值通过 1 时, 不动点的稳定形态和个数都发生了变化, 可称  $u=1$  为该模型的一个分岔点。

(4)  $u=2$

$$\left| \frac{dF_u}{dx} \right|_{x_{f1}} = u = 2 > 1 \quad (3-34)$$

故  $x_{f1}$  仍为不稳定不动点。又:

$$\left| \frac{dF_u}{dx} \right|_{x_{f2}} = |3 - 2u| = 1 \quad (3-35)$$

且:

$$\lambda(x_{f2}) = 0 \quad (3-36)$$

此时,  $x_{f2}$  又变为临界不稳定的。

(5)  $u > 2$

当  $u > 2$  时, 其演化性态可通过数值分析模拟。模拟表明<sup>[6]</sup>, 随着  $u$  值的逐渐增大, 系统分岔点数目成倍增加(倍周期分岔), 当  $u \rightarrow 2.3$  时, 出现周期  $2^\infty$ , 即系统演化由周期区向混沌区过渡。所以, 可把  $u \geq 2.3$  作为系统运动是混沌性态的标志。

可看出混沌性是岩石变形过程中的内部本质属性, 它与外部扰动产生的外在随机性不同。混沌可由简单的非线性动力学模型产生。

## 第五节 对序参量方程的讨论

对在压缩条件下岩石变形而言, 若以宏观声发射参数表示序参量, 可看出式(3-21)表示的曲线(图 3-1)与试验曲线(图 3-2)十分类似。对滑坡而言, 若以位移观测数据作为序参量, 其曲线形态(图 3-3)也与图 3-1 类似。有的学者<sup>[7]</sup>用 Verhulst 模型:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_c y - c_c y^2 \quad (3-37)$$

进行滑坡预报取得了较好结果。而滑坡预报用 Verhulst 模型缺乏数学依据, 物理意义不明确。如用本文建立的序参量模型, 不仅物理意义清楚, 而且经我们进行滑坡实例分析, 其预报精度比 Verhulst 模型高。本书第七章用突变理论方法, 得到的滑坡简化物理预报模型与式(3-37)类似。这说明, 含“3 次方”的模型比含“2 次方”的模型更有物理依据。

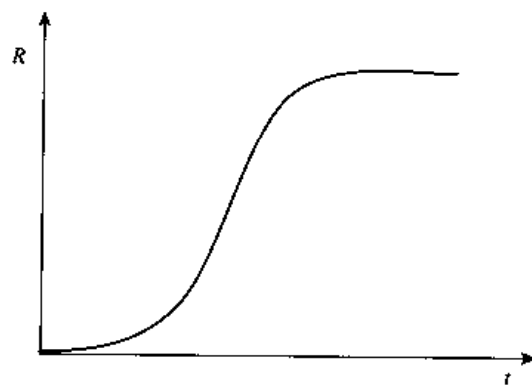


图 3-1 序参量方程曲线形态

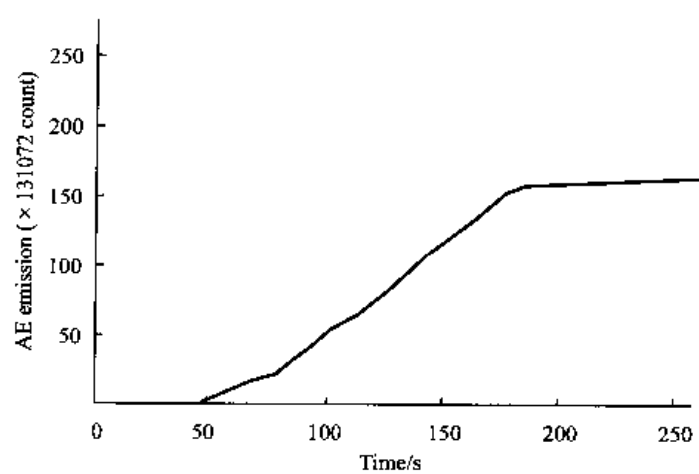


图 3-2 大理岩声发射实验曲线

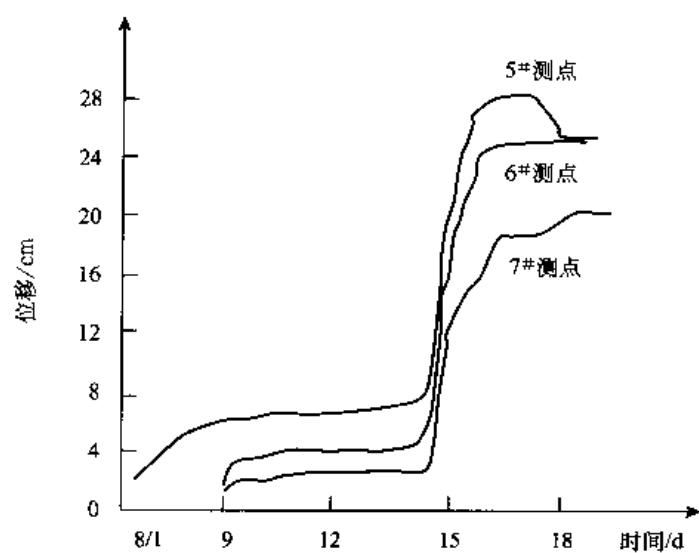


图 3-3 清江隔河岩电厂集水井下游边坡 5#、6#、7#  
测点位移变化图<sup>[8]</sup>

## 参 考 文 献

- [1] Bottani C. E. Thermoacoustic Instabilities in Strained Solids; A Synergetic Approach, Proc. Int. Phys. Course LXXXIII, E. Fermi. 1981.
- [2] 吴大进, 曹立, 陈立华. 协同学原理和应用. 武昌: 华中理工大学出版社, 1992, 67 ~ 329.
- [3] Cagloti G and Ferro A. Mechanical and thermal behavior of materials. Proc. Int. Sch. Phys, Course LXXXII, E. Fermi. 1981.
- [4] 孙广忠. 岩体结构力学. 北京: 科学出版社, 1988.
- [5] 仪垂祥. 非线性科学及其在地学中的应用. 北京: 气象出版社, 1995.
- [6] 黄润秋, 许强. 工程地质广义系统科学分析原理及应用. 北京: 地质出版社, 1997.
- [7] 晏同珍. 滑坡发生时间的预测预报. 滑坡论文选集. 成都: 四川科学技术出版社, 1987, 233 ~ 243.
- [8] 夏元友, 朱瑞康, 陆文兴. 临滑边坡的施工期监测设计方法. 中国地质灾害与防治学报, 1994, 增刊. 370 ~ 375.

## 第四章 岩体失稳过程的耗散结构形成机制与混沌特征

### 第一节 引言

普利高津<sup>[1]</sup> (Prigogine) 创立的可载入史册的“耗散结构论” (Dissipative Structure Theory) 指出, 一个远离平衡态的开放系统, 通过不断地与外界交换物质和能量, 当外界条件的变化达到一定阈值时, 可能从原有的无序状态转变为一种在时间上、空间上或功能上的有序状态。普利高津把这样形成的有序状态称为耗散结构, 因为它们的形成和维持需要能量的耗散。

耗散结构理论, 又称之为非平衡系统的自组织理论。所谓自组织, 是因为在这样的系统中, 并无谁来发号施令、进行综观全局的统筹协调, 而是系统内部自我协调、自我组织, 形成一个具有自我调节功能的有序系统。

一个耗散结构的形成和维持至少需要三个条件: 一是系统必须是开放系统, 孤立系统和封闭系统都不可能形成耗散结构; 二是系统必须处于远离平衡的非线性区, 在平衡态或近平衡态, 大量的试验和理论研究都证明其不可能发生质的突变而从无序走向有序, 也不可能从一种有序走向新的更高级的有序, 即非平衡是有序之源; 三是系统中必须有某些非线性动力学过程, 如正负反馈机制等。这种非线性相互作用, 能够使系统内的各要素之间产生协调动作和相干效应, 从而使系统从杂乱无章变为井然有序。

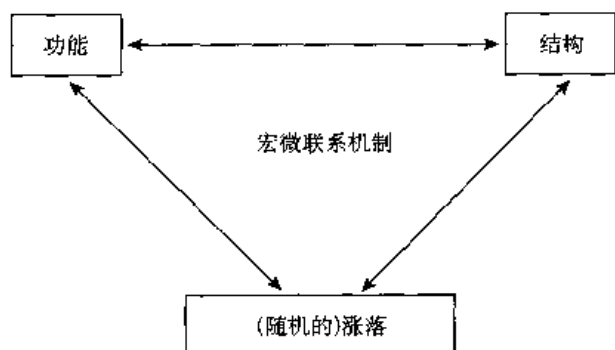


图 4-1 功能、结构和涨落之间的相互关系

一个耗散结构的形成不仅与系统的结构和功能有关, 而且与系统的随机涨落也有着密切联系。三者的相互关系如图 4-1 所示。

耗散结构理论是研究非线性性质、非平衡体系的科学, 决定了它们在地学中的应用的普适性和广阔前景。地质体中平衡和封闭是相对的, 非平衡和开放才是绝对的, 在自发地质过程的非平衡演变中, 可能形成耗散结构。

耗散结构理论已在地震、物理、化学、材料、生物等学科领域得到了广泛应用, 取得了一批重要成果<sup>[1,2]</sup>, 但在工程地质与岩石力学领域中的研究与应用, 才刚刚起步, 有诸多问题需要解决, 例如在岩体失稳过程中是否形成耗散结构、耗散结构形成的条件等问题。只有这些问题解决了, 才能使耗散结构理论在岩体失稳过程的研究中得到广泛深入地

应用。

非线性动力学系统(NDS, nonlinear dynamical systems)理论的概念和数学方法已经被广泛应用于包括地震、地貌和滑坡灾害研究的诸多学科领域<sup>[3~9]</sup>。NDS 概念和方法在滑坡灾害研究中的应用,给我们提供了对滑坡机理作深入洞察的新的技术途径。应用 NDS 理论研究滑坡演化过程的动力学行为已经引起了许多学者的密切关注。

源自确定性系统的混沌导致复杂的、不规则的演化模式<sup>[8]</sup>。混沌系统对初始条件和扰动非常敏感,在初始状态确定中的小误差能够被迅速放大。由于在初始条件确定中误差的不可避免性,一般认为如果滑坡的演化行为是混沌的,那么应该考虑滑坡的可预报性界限。大量的推测和某些证据表明:混沌可能是地球物理中的一种普遍现象<sup>[5,10~12]</sup>。

以前研究滑坡预测的统计方法<sup>[13~15]</sup>是严格确定性的,不能反映滑坡系统演化过程的混沌特征,这是滑坡长期预测不能实现的根本原因。如果某个滑坡的演化是混沌的,那么它的长期行为不能被准确预测。换句话说,在滑坡预测研究中,应该考虑其可预报时间尺度。

## 第二节 岩体变形演化过程中耗散结构形成的条件

### 一、岩体变形系统的非线性特征与能量耗散

#### 1. 岩石与岩体的非线性

唐春安<sup>[16]</sup>指出,对地表岩石结构而言(即可以不考虑温度影响),岩石本身的性质主要是弹脆性的,形成材料宏观非线性的主要原因并不是微观介质的非线性,而是微观介质参数的不均匀性,这种不均匀性使得岩石在承载过程中不断经历单元体的破坏,细观单元体的连续破坏便造成宏观介质的不断损伤,从而形成宏观的非线性变形现象。因此,在一个统一的变形场中,微破裂不断产生的原因除了荷载不均、形态不够光滑等结构因素形成应力集中之外,更主要的是单元体强度的不均匀性。例如,微观介质强度分布较为均匀的材料,其宏观表现一定是以线性性质为主的材料;反之则一定表现出明显的非线性行为。

对岩体而言,结构面与岩块的非线性耦合作用,使得其在演化过程中的非线性行为更加复杂。

从岩体前兆变形物理量随时间变化表现出的非单值、单点的不确定现象及滑坡位移加速蠕变过程等,都表明了非线性的存在(图 4-2 和 4-3)。岩石力学试验、理论研究成果都表明,岩体的本构方程及岩体的宏观应力应变属性都是非线性的,有时为了简化分析采用线性假设,只是在一定应力范围内而采用的一种近似手段。

若岩体变形系统内部各部分相互作用仅仅是线性的,则只能造成系统的衰亡,因为此时事物只能是无限增长或衰减的极端均匀状态。事物相互依存的非线性表现在相互约束、相互反馈上,有了非线性才有形态的多样性:定态、周期状态、非周期状态、局部的复杂结构等。由现代非线性科学理论得知,非线性是复杂性之源,所以人们常说“地质体太复杂了”。

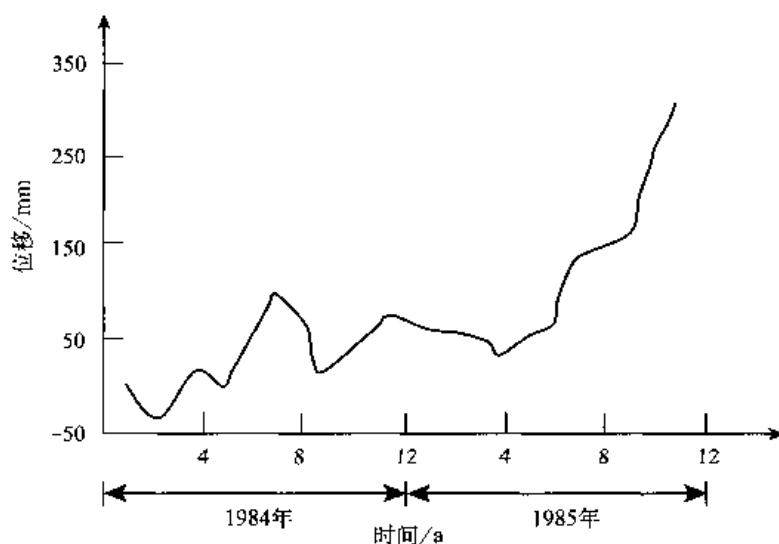


图 4-2 洒勒山新滑坡位移不连续现象<sup>[17]</sup>

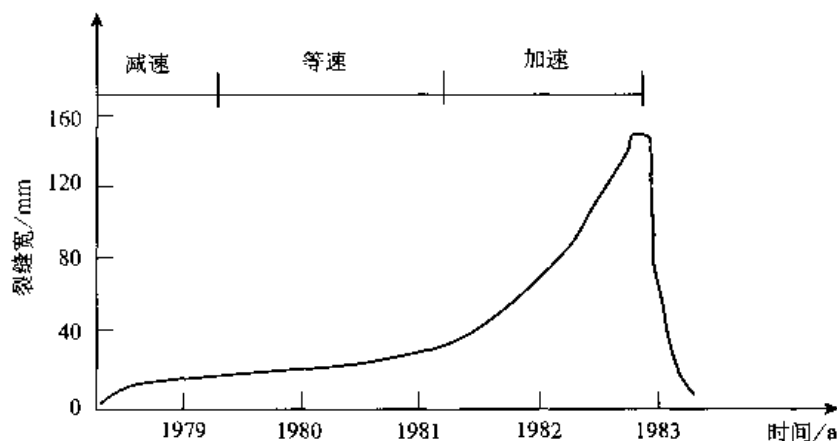


图 4-3 洒勒山滑坡裂缝变形过程<sup>[18]</sup>

## 2. 岩石与岩体变形过程中的能量耗散机制

首先把岩石的微观变形机制划分为两种类型：第一种类型是在一定的边界条件下，岩石的微观变形使岩石变形受到阻止作用；第二种类型是在一定的边界条件下，某些变形机制消除前者的阻止作用使变形继续下去。前者称应变硬化作用，后者称应变软化作用。

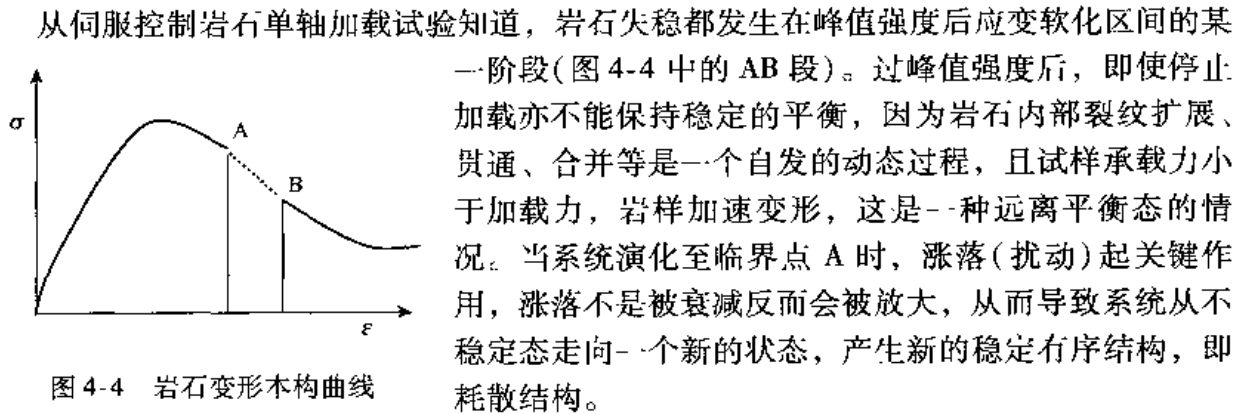
应变硬化作用和应变软化作用，将外部传递给变形体系的能量转变为岩石的内部应变能，或将岩石内部的高应变能转变为热能，即将利用率高的能量转变为利用率较低的能量，这个过程是能量的耗散过程<sup>[19]</sup>。

上述两大类变形机制在岩石变形过程中有三种相互作用形式：①应变硬化作用中各种微观变形机制越活跃，则提供越多的应变能给应变软化作用中各种微观变形机制，有利于后者活化；同样，后者越活跃消耗的应变能越多，使前者的作用增强，即不易产生大量的应变能积累。②当外界传递给变形岩石体系的能量速率一定时，应变硬化作用中各种变形机制都消耗外界的能量。如果各种变形机制中的某一种机制增强，它就消耗更多的外界传

递给体系的能量，因而就抑制了其他变形机制的作用，当体系的温度、压力变化不大时，某种作用不能无限地增强，又因为其他作用没有达到“饱和”，就要阻止前者的增强。同理，应变恢复作用中的各种变形机制都共同消耗应变能，存在着与上述相似的竞争。③各种微观变形机制在变形岩石系统中的自身竞争。当体系的温度、应力变化不显著时，由于能量源一定，不可能使某一变形机制无限制地增强。以上说明了岩石变形过程中存在着非线性关系。

岩体显然是一个开放系统，通过水的循环、热的交换、风化、剥蚀及卸荷等作用与外界进行物质和能量交换。如水的作用，不仅会使水渗入岩体介质，而且在流出过程中又会带走某些物质；又如在地应力区，河谷临空面附近的应力集中，往往使周围岩体（特别是坡脚和谷底处）内的应力超过其强度，于是岩体发生破裂变形，形成各类表生结构面。而表层岩体内的应力又因释放而降低，围绕河谷临空面形成一个应力降低带。应力集中产生的能量积累和应力释放导致的能量耗散，表明所研究的岩体系统和外界（卸荷作用等）进行着能量交换。

## 二、岩石失稳时的状态——远离平衡态



## 三、岩体失稳过程中的降维、减熵与有序性

由岩石单轴拉张试验（图 4-5）可看出：随着外荷载增加，首先是均匀的变形阶段，微破裂在空间均匀地分布，随着变形进入非线性阶段，特别是超过岩样的峰值荷载后，微破裂开始丛集，并逐渐向未来大断裂面附近集中，这种集中和丛集过程使微破裂的空间分布出现有序降维趋势。

从微破裂的均匀、随机的空间分布（无序）到出现变形局部化，直至贯通断裂（有序），其根本原因在于系统离开了原有的平衡态，系统失稳之源也来自于无序结构的失稳和新的有序结构的形成。

在向失稳态演化过程中，岩体必然要产生一些变形破坏现象，此时系统有熵产生，它使系统进化。进化过程中，熵产生伴随着系统内部有序（不稳定性）和无序（稳定性）的存在与竞争。此时产生的熵必

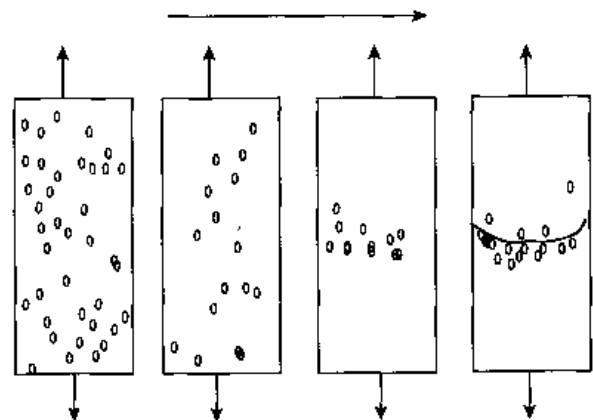


图 4-5 在岩石变形过程中微破裂的空间分布<sup>[20]</sup>

定为负熵，否则岩体系统的演化必将终止。由此可见，岩体失稳过程必伴随有减熵过程。图 4-6 示出了云南龙陵地震强震前的地震活动熵的时间进程，可看出强震前复杂孕震系统的减熵特征有普遍存在的特点。

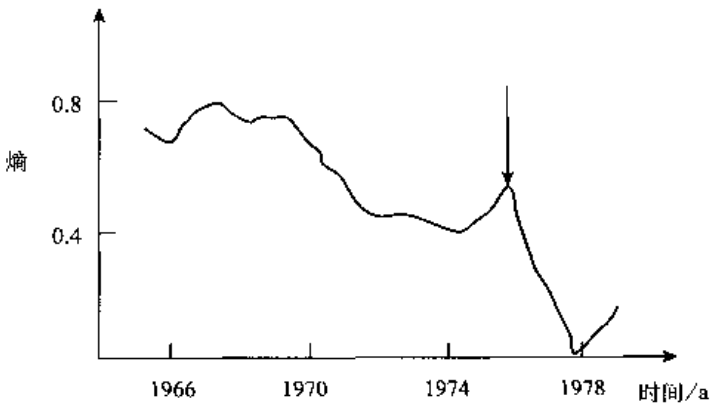


图 4-6 云南龙陵地震强震前地震活动熵的时间变化<sup>[21]</sup>

系统科学理论也已证明：降维、减熵、有序的内涵是一致的。降维和减熵过程的存在表明系统的动态特征是一个从无序到有序的发展过程，说明系统的约束变得越来越强，表现出某种临界行为。有序性往往意味着系统的不稳定性，即熵和分维值低，有序度大，系统的稳定性差。因此，系统在不稳定时，可能形成耗散结构。图 4-7 给出了在地震前分维值与时间的关系，可看出在向失稳态演化过程中，降维过程是客观存在的。

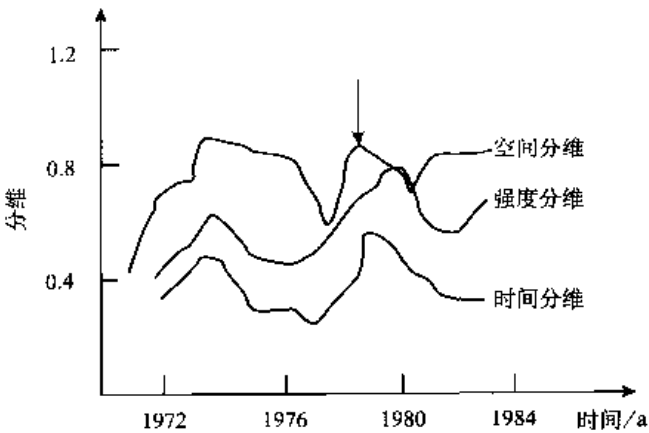


图 4-7 云南普洱地震前分维随时间的变化<sup>[21]</sup>

### 第三节 岩体失稳过程中耗散结构的形成机制

根据裂隙岩石的三轴压缩试验(如图 4-8 所示)，予以详细分析。

#### 1. 压密阶段(OA)

虽然压缩变形具非线性特征，但在该区域加载和卸载，岩石的结构和性质并不产生不可逆的变化，这是一种平衡态。



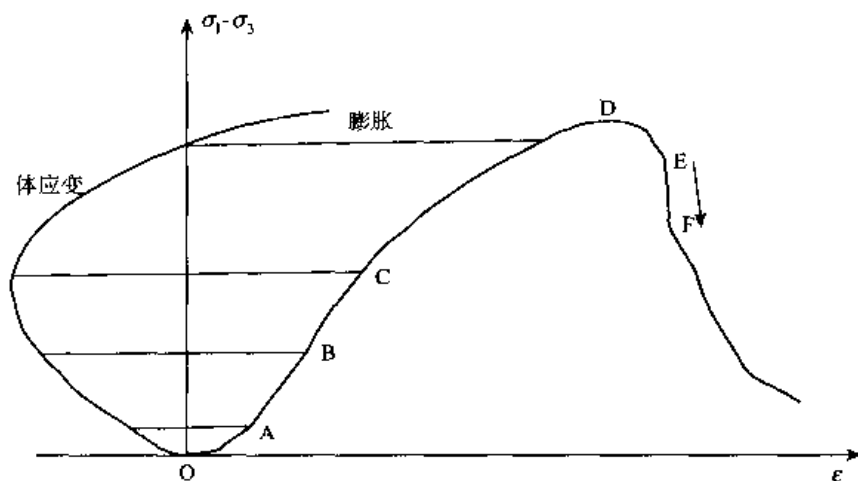


图 4-8 三轴应力作用下岩石的本构曲线

## 2. 弹性阶段 (AB)

系统内部没有宏观不可逆过程，处于一种均匀的变形状态，这亦是一种平衡态。

耗散结构理论已指出：处于平衡态的系统一般具有空间均匀的结构，即无序结构。

## 3. 稳定破裂发展阶段 (BC)

超过弹性极限后，岩体进入塑性变形阶段，体内微破裂开始出现且随应力差的增大而发展，当应力保持不变时，破裂也停止发展。

变形开始出现不可逆过程，但这种过程容易被控制。如在此阶段停止加载，经过一定时间后，系统将可能达到一个宏观上不随时间变化的恒定状态，即定态，如在蠕变-时间曲线上，表现为蠕变值恒定。这种状态是一种近平衡，它不会改变系统原来的空间均匀性，任何新的结构和状态都不可能产生。

## 4. 不稳定的破裂发展阶段 (CD)

进入本阶段后，微破裂的发展出现了质的变化，由于破裂过程中所造成的应力集中效应显著，即使工作应力不变，破裂仍会不断地累进性发展，使薄弱环节依次破坏。体应变转为膨胀后，轴应变速率和侧向应变速率迅速增大。

在此阶段，微破裂在空间的分布出现应变局部化，即已从无序向有序转化。由于微破裂的扩展是一个自发的动态过程，系统远离平衡，一方面从外界吸收能量，另一方面又因微破裂发展释放能量（以声能或热能形式等），系统的宏观状态也将随时间变化（变形速率增大、膨胀），这是一种远离平衡的非平衡态。由于远离平衡，仅仅是产生不稳定性的一個必要条件而非充分条件。因此，在此阶段，尽管系统处于非平衡态，但由于岩样变形仍处于应变硬化阶段，系统的变形将是稳定的（在此阶段如果考虑时间因素，由于流变效应和累进性破坏，岩体如果失稳，则在此阶段也能形成耗散结构），虽然可以说临近形成耗散结构，但从严格意义上讲在此阶段还不能形成耗散结构。

## 5. 过峰值强度后

岩体内部的微破裂面发展为贯通性的结构面（有序）。在外界因素的强制作用下，加载荷载大于岩样的承载能力，使变形速率不可控地急剧增大，在此阶段即使停止加载也不能保持稳定的平衡，系统已远离平衡态，当演化至临界点 E 时，由于涨落的作用，使不稳定状

态自发地变动失稳(由 E→F)而形成稳定的有序结构——耗散结构。

## 第四节 滑坡孕育演化的自组织过程

### 一、自组织过程描述

以斜坡失稳为例,阐述岩体失稳过程中耗散结构的形成机制。将斜坡岩体滑动面系统,看作由一个强度较高的锁固体和其两端的蠕滑体组成,前者为应力积累单元,后者为应力调整单元。调整单元的蠕滑性质,使得系统外的能量通过调整单元传递给积累单元,在积累单元内造成应力积累。而积累单元应力积累达到一定程度后,通过调整单元又对外界制约、反馈,所以组合模式是一个开放系统的模式。

在积累单元还没有积累起较大应力时,整个系统的应力分布是杂乱(无序)的。虽然应力分布有小涨落存在,但基本处于均匀无序状态。系统内各部分的介质性质差异较大,一旦某一部分的应力超过其最大承载应力,则这个部分就会错动。这种错动是独立的,相邻部分之间的关联程度较小。这时尽管斜坡会发生局部蠕滑,但其整体是稳定的(平衡和近平衡不会产生耗散结构)。

一旦积累单元的应力积累达到一定程度,在积累单元的两端就会造成应力集中,这种应力集中打破了滑动面系统内应力分布的无序性。随着应力积累的增大,调整单元内各部分的运动不再是相互无关的,而是逐渐出现步调一致的状况,即从远离平衡态向有序态演进,并导致积累单元应力的进一步积累,形成积累和调整之间的正反馈作用(由前分析,这种作用必然是非线性的)。随着应力的进一步积累,这种关联程度进一步增强,当达到临界值并在外部涨落作用下,突变发生,稳定有序结构——耗散结构形成。

正反馈机制的存在,才能使随机的涨落被放大,导致旧的结构不稳定而产生新的有序结构。这就是耗散结构理论曾明确提出的“通过涨落达到有序”。事实上,涨落(扰动)对岩体失稳(当处于临界态时)确有触发作用。如 Sheko<sup>[22]</sup>和 Fussanger et al.<sup>[23]</sup>认为,滑坡活动与天体运动规律有着一致性。

### 二、滑动面介质累进性破坏的重正化群模型

对于应力积累单元,可认为它由若干基本块体组成。当基本块体尺度足够小时,可认为其应力分布是均匀的。当基本块体的应力达到其破裂强度,基本块体将发生破坏。

把应力积累单元分成  $N$  段,每一段即为一个基本块体。把相邻的两个块体结合起来,形成一个集团,原来的  $N$  块分成了  $N/2$  个集团,如图 4-9 所示。规定只有当每个集团内的两个块体都破裂,集团才算破裂。假定集团内的块体只在集团内起作用并假定应力仅在集团内部转移,这样使得问题可解。集团破裂的方式有两种:一种是在剪应力的作用下,两个块体同时破裂;另一种是其中一个块体先破裂,然后应力转移到未破裂的块体上,导致另一块体破裂。

对于一个只包含两个块体的集团,可能有四种状态<sup>[24]</sup>:  $[bb]$ ,  $[bu]$ ,  $[uh]$ ,  $[uu]$ , 其中  $b$  表示破裂(broken);  $u$  表示未破裂(unbroken)。显然  $[bu]$  和  $[ub]$  是相同的状态。现在考虑块体破裂后应力转移对相邻块体的影响。设块体的破裂概率为  $P_1$ , 用条件概率  $P_{2,1}$

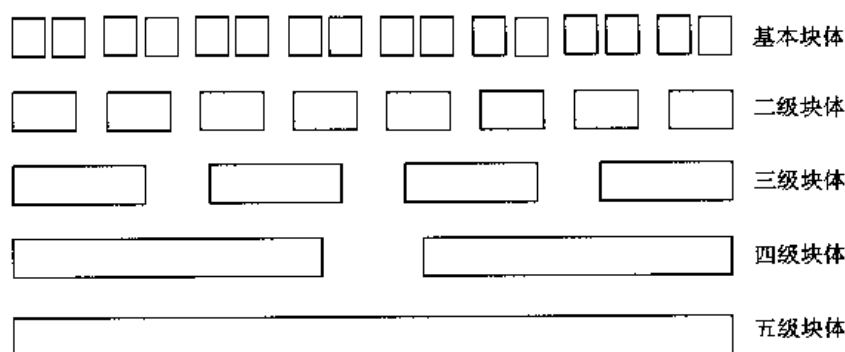


图 4-9 滑动面介质累进性破坏的重正化群模型

代表集团内的一个块体破裂后向相邻块体转移应力的概率。由于应力转移，集团内的状况将发生改变，即 $[bb]$ ,  $[ub] \rightarrow [bb]$ ,  $[ub]$ ,  $[uu]$ 。在这四种状态中，只有 $[bb] + \{[ub] \rightarrow [bb]\}$ 状态对二级块体的破裂概率 $P_2$ 有影响，应用数学上的概率知识，可得到 $P_2$ 为：

$$P_2 = P_1^2 + 2P_1(1 - P_1)P_{2,1} \quad (4-1)$$

式中，转移概率的表达式<sup>[24]</sup>为：

$$P_{2,1} = 1 - (1 - P_1)^3 \quad (4-2)$$

同理，对高级块体有：

$$P_{n+1} = 2P_n[1 - (1 - P_n)^4] - P_n^2 \quad (4-3)$$

上式称为重正化群方程。

重正化群方法的一个重要步骤是寻找不动点，即对应 $P_{n+1} = P_n = P^*$ 的点，解方程可得三个不动点为 $P^* = 0, 1, 0.206$ 。有的不动点是稳定的，而有的不稳定的。依据不动点判别准则<sup>[25]</sup>可知：当 $P^* = 0$ 时， $\left| \left( \frac{dP_{n+1}}{dP_n} \right) \right| = 0 < 1$ ，为稳定不动点；当 $P^* = 1$ 时， $\left| \left( \frac{dP_{n+1}}{dP_n} \right) \right| = 0 < 1$ ，

为稳定不动点；当 $P^* = 0.206$ 时， $\left| \left( \frac{dP_{n+1}}{dP_n} \right) \right| = 1.618 > 1$ ，为不稳定不动点。 $P^* = 0$ 表示系统处于稳定状态； $P^* = 1$ 表示系统处于全部破裂状态； $P^* = 0.206$ 时，可将系统分成两个状态区域，如果 $P_1 < P^*$ ，则系统将演化为 $P \rightarrow P^* = 0$ ，即系统处于稳定状态；如果 $P_1 > P^*$ ，则系统将演化为 $P \rightarrow P^* = 1$ ，即系统是不稳定的。因此，如果 $P_1 < P^*$ ，则系统将演化为 $P \rightarrow P^* = 0.206$ 是临界值，在临界值之下，系统只能造成局部关联，而一旦超过临界值，系统就会产生长程关联，导致系统失稳。可看出，斜坡滑面锁固段只要有20.6%的区段破坏贯通，那么该斜坡将向失稳态演化，这可能给出了一个具有普适性的破坏概率指标。

## 第五节 系统运动的混沌性与滑坡可预报性

### 一、引言

根据NDS吸引子概念<sup>[26]</sup>，我们可以把长期的滑坡观测时间序列作为滑坡演化动力学模型的解来重建滑坡系统动力学，从系统运动轨道的发散速率确定可预报时间尺度。用这

种方法,能够避开准确描述滑坡演化动力学方程和求解的难题。

## 二、理论基础

### 1. 可预报性的测度

把滑坡演化过程看作一个非线性动力学系统(NDS)。滑坡 NDS 包括  $n$  个相互关联的分量  $x_i, i=1, 2, \dots, n$ 。对一个具体系统,这些分量可能包含描述构造、岩性和水文等条件的不同因素或变量。设滑坡孕育动力系统有如下形式:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-4)$$

动力系统的时间演化,由  $n$  个变量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  构成的  $n$  维相空间轨道  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  描述。如果滑坡动力系统是混沌的,那么它应该满足<sup>[27]</sup>: ①存在非整的吸引子维数; ②至少它的最大 Lyapunov 指数大于零。

初始时刻  $t_0$  的状态用相空间上的一点  $x_0 = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  表示,而  $x_0 + \delta x$  表示另一个状态,  $\delta x$  表示小偏差。 $\delta x$  在相空间上的时间演化受下列线性微分方程组控制,即

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta x_j, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-5)$$

式中,  $A_{ij}$  是式(4-5)右端 Jacobi 矩阵的元素,它的表达式为:

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right|_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (4-6)$$

Jacobi 矩阵的特征值在一段长时间内的平均值,可依其大小排列为:

$$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_n \quad (4-7)$$

式中,

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta x_i|, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-8)$$

式(4-7)称为 Lyapunov 指数谱。如果时间相对长,式(4-8)可重写为如下表达式:

$$\delta x_i = e^{L_i t} \delta x_i(0), (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-9)$$

由式(4-9)可知, Lyapunov 指数实际上给出了在相空间中,系统状态误差沿特征向量方向的指数增长率。如果状态误差随时间不断增长,那么该系统的长期行为是不可预报的,反之是可预报的,所以通过 Lyapunov 指数可度量系统的可预报性。

在三维相空间中,定常吸引子、周期吸引子、拟周期吸引子和混沌吸引子的三个 Lyapunov 指数符号 (Wolf et al., 1985<sup>[27]</sup>) 分别为:  $(-, -, -)$ ,  $(0, -, -)$ ,  $(0, 0, -)$  和  $(+, 0, -)$ 。可见只有混沌吸引子至少有  $L_1 > 0$ , 这是它与其他吸引子不同的标志,用它可以判断系统是否处于混沌状态。

所有正的 Lyapunov 指数之和为:

$$h = \sum_{L_i > 0} L_i \quad (4-10)$$

称为 Kolmogorov 熵<sup>[28]</sup>, 表征一个物理系统的信息平均产生率。 $1/h$  表示系统的状态误差增长一倍需要的时间,称为系统的平均可预报时间尺度。显然,这个量对滑坡预报研究很有价值。

## 2. 可预报时间尺度的计算方法

对大多数滑坡系统, 其动力学方程的具体表达式至今难以写出, 所以直接计算  $h$  比较困难。然而, 从 NDS 理论知道, 从单一动力学变量的时间序列中, 可提取其他动力学变量的信息。应用时序数据重建相空间的方法<sup>[29]</sup>, 可方便地计算  $h$  的下限——二阶 Renyi 熵  $h_2$ 。

在  $m$  维空间中的两个点可定义为:

$$x_m(t_i) = [x(t_i), x(t_i + \Delta t), \dots, x(t_i + (m-1)\Delta t)] \quad (4-11)$$

$$x_m(t_j) = [x(t_j), x(t_j + \Delta t), \dots, x(t_j + (m-1)\Delta t)] \quad (4-12)$$

式中,  $\Delta t$  为时间间隔, 且  $|t_i - t_j| > \Delta t$ 。记这一点对的距离为  $r_{ij}$ , 对给定的阈值  $r$ ,  $r_{ij} < r$  的点对在序列的总时间点数  $N$  中共有:

$$N_m(r) = \sum_{i,j=1}^N \theta(r - r_{ij}) \quad (4-13)$$

式中,  $\theta$  为 Heaviside 函数, 即

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (4-14)$$

标准化的关联函数为:

$$C_m(r) = \frac{N_m(r)}{N^2} \quad (4-15)$$

当  $N$  足够大和  $r$  很小时, 应用如下标度率<sup>[29]</sup>:

$$C_m(r) \approx r^{d_2} e^{-mh_2 \Delta t} \quad (4-16)$$

来计算:

$$d_2 = \frac{\log C_m(r)}{\log r} \quad (4-17)$$

$$h_2 = \frac{1}{\Delta t k \log e} \log \frac{C_m(r)}{C_{m+k}(r)} \quad (4-18)$$

式中,  $d_2$  和  $h_2$  分别为吸引子的关联维数和二阶 Renyi 熵;  $k$  为正整数。若随相空间维数  $m$  的升高,  $d_2$  趋于一个极限值, 则由时间序列描述的系统存在一个吸引子, 刚达到极限值的  $d_2$  是该吸引子的维数, 相应的  $m$  值是描述系统动力学行为所需的最少状态变量个数。若随  $m$  增大,  $d_2$  也增大或呈随机变化, 则表明所讨论的系统是一个非确定性的随机系统, 具有完全不可预报性。

计算维数  $d_2$  时, 可能出现以下几种情况:

1)  $d_2 = m$ 。这种情况对应于噪声序列, 具有完全不可预报性。

2)  $d_2 = 1$  或  $d_2 = 2$ 。这种情况表明时间序列是一种周期或准周期振荡序列, 具有完全可预报性。

3)  $d_2 > 2$  或  $d_2$  不为整数。这表明时间序列具有混沌性, 必须考虑满足某种精度要求的可预报时间尺度。

因为  $h_2$  比  $h$  容易得到, 而且一些实例说明  $h_2$  是  $h$  的很好估计<sup>[28]</sup>, 故可把

$$T = 1/h_2 \quad (4-19)$$

作为可预报时间尺度。由 NDS 理论知道,  $d_2$  越大, 系统的混沌程度越强。

### 三、实例分析

#### 1. 龙西新滑坡

黄河龙羊峡龙西新滑坡发生于1986年1月25日。这是一个体积为 $150 \times 10^4 \text{ m}^3$ 的平面滑动型滑坡。滑坡体由第四纪黏土和砂土组成，滑前位移时序观测数据如图4-10所示。

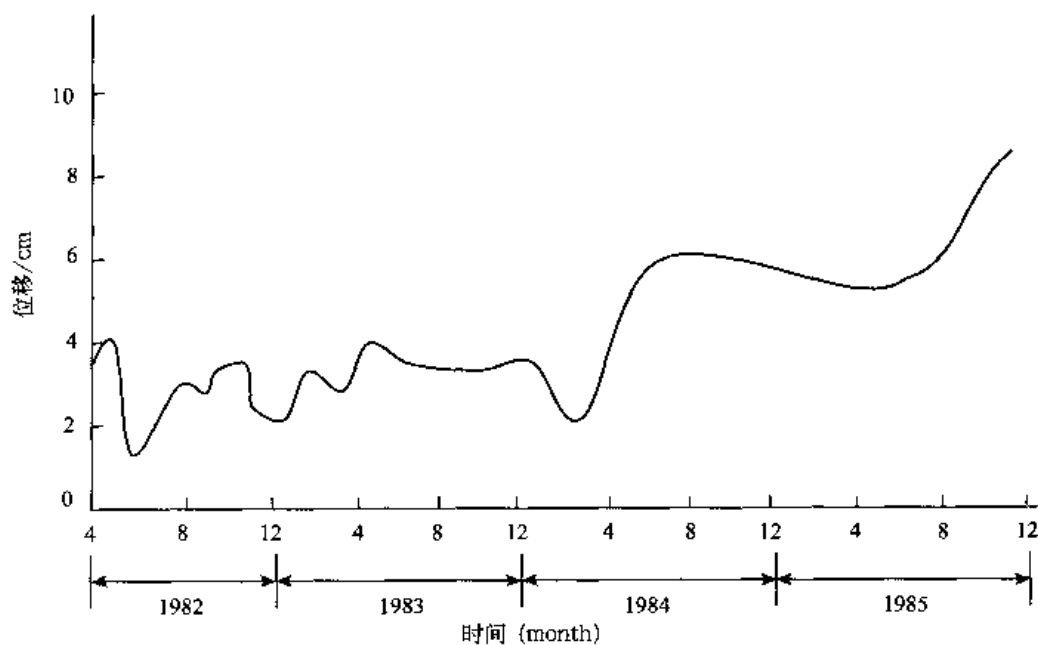


图4-10 龙羊峡龙西新滑坡位移观测序列<sup>[17]</sup>

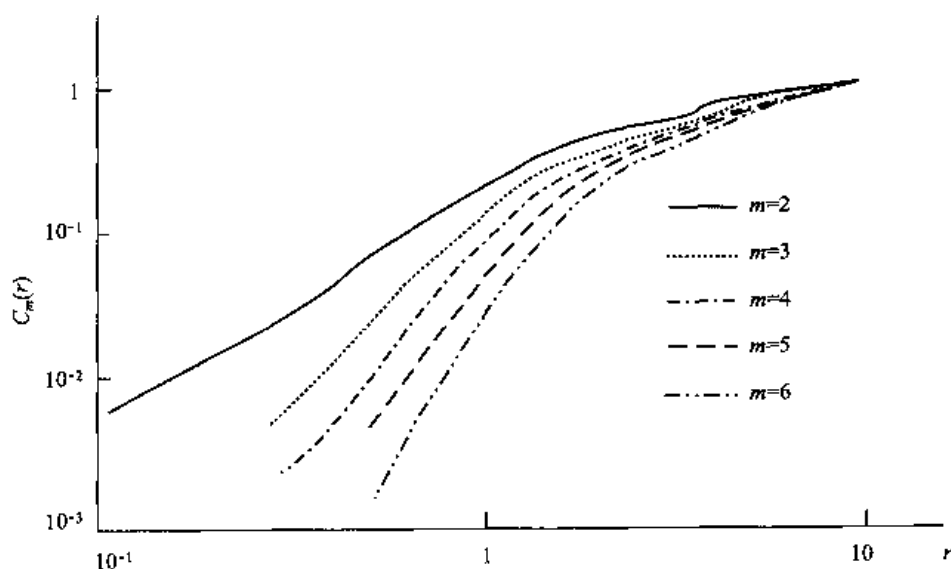


图4-11 龙西新滑坡  $\log C_m(r) - \log r$  关系图

根据上述方法,对图 4-10 的数据进行处理。具有等时间间隔(15 天)的数据个数  $N = 72$ 。当  $m \approx 2 \sim 6$  且  $\Delta t = 3$  时,  $\log C_m(r) - \log r$  的关系图如图 4-11 所示。根据曲线线性段斜率,可计算  $d_2$ ,然后考察  $d_2$  随  $m$  的增加是否趋于极限,就可以确定吸引子属性和其维数。

由图 4-12 可知,当  $m = 3$  时,分维值达到极限值  $d_2 = 2.63$ 。这说明,龙西新滑坡的演化已处于一个混沌吸引子上。这意味着描述该滑坡的动力学行为至少需要 3 个独立的状态变量,即建模时至少需要 3 个不同的观测序列。

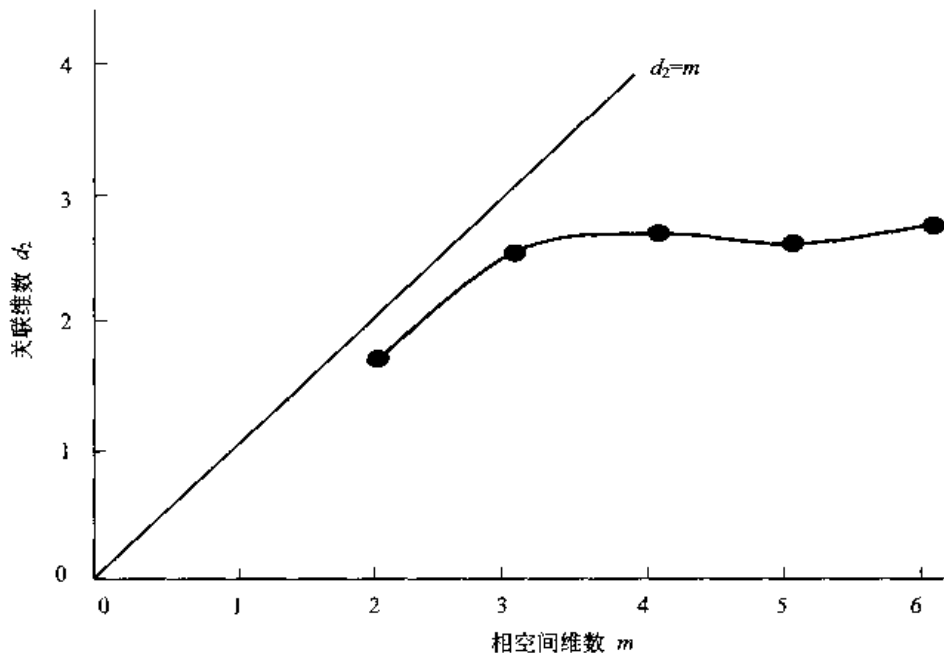


图 4-12 龙西新滑坡关联维数  $d_2$  与相空间维数  $m$  关系

由于龙西新滑坡存在混沌吸引子,因此可确定它的平均可预报时间尺度。当  $m$  从 3 增加到 5 时,  $h_2$  的变化范围为 0.22 ~ 0.32, 其平均值为 0.27, 可确定该滑坡的平均可预报时间尺度为  $T = 15/0.27 \approx 56$  days。这说明在 1986.1 ~ 1986.2.26 之间可进行确定性预测,预测误差的增长量将小于一倍;在此时间范围外,预测误差将变得很大,确定性的预测已没有实际意义。

此外,改变  $\Delta t$  值再计算  $h_2$ ,发现  $h_2$  变化不大,即  $\Delta t$  对  $h_2$  影响不大,这表明确定的龙西新滑坡可预报时间尺度可信。

## 2. 新滩滑坡

1985 年 6 月 12 日凌晨,在湖北省秭归县新滩镇一带,发生了总方量达 2000 万  $m^3$  的新滩滑坡,该滑坡为沿基岩接触面滑动的松散堆积体滑坡。在坡体中部 A3 观测点的实测位移-时间曲线如图 4-13 所示,该曲线随时间呈增长趋势。

同理,应用如上分析方法,可计算得到新滩滑坡的关联维数与可预报时间尺度分别为 1.662 与 5.2 月(如图 4-14 和 4-15 所示)。这也说明新滩滑坡的演化行为是混沌的,但其混沌程度比龙西新滑坡要弱。

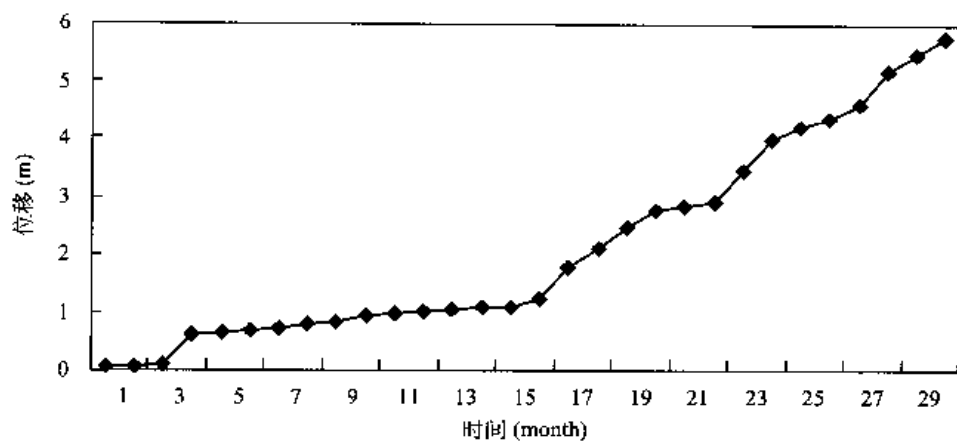


图 4-13 新滩滑坡 A3 测点在 1979. 4. 1 ~ 1985. 1. 1 间的位移观测序列<sup>[17]</sup>

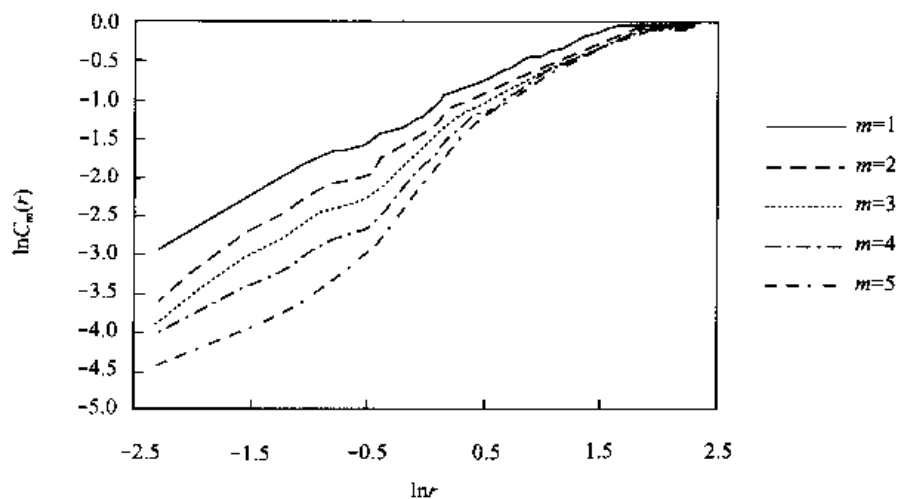


图 4-14 新滩滑坡  $\ln C_m(r) - \ln r$  关系图

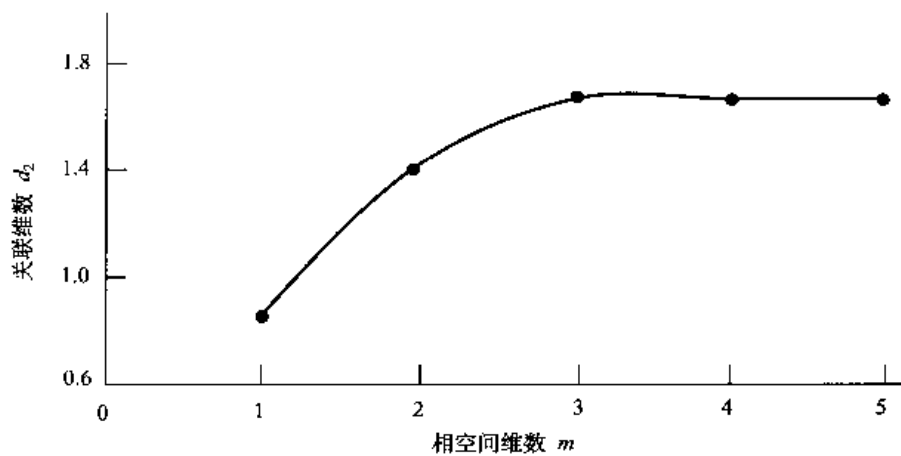


图 4-15 新滩滑坡关联维数  $d_2$  与相空间维数  $m$  关系图



## 四、滑坡长期预报、中期预报与临滑预报的可行性分析

在力学中我们已经讨论了许多确定性系统,例如,根据牛顿力学,利用一组确定性方程和初始条件能够预测天体的运动,这是一种确定性预测。基于这种成功的鼓舞,多数人认为:只要能获得足够多的观测信息,从原理上说任何预测都能做到确定性的。然而当系统稍微复杂时,预测问题不是如此简单。Nussbaum (Turcotte, 1997<sup>[11]</sup>)用两个滑块组成的模型模拟了地震过程,模拟结果表明:尽管模型的控制方程是确定性的,但在给定的某些参数条件下,会出现块体的随机运动。这证实了简单的确定性系统也能产生随机行为——混沌。显然,系统的物理规律不总是确定性的,随机现象也有其物理基础。对复杂的滑坡系统,如果它的动力学行为是完全确定性的,那么任何滑坡都能被准确预测,但事实绝非如此。例如,包括湖北盐池河山崩与甘肃洒勒山滑坡在内的许多滑坡都没有提前预报,即使滑坡后的验证预测也不能达到较高的精度,这都说明了某些滑坡具有内在随机性(混沌)。混沌发生时,应该限制可预报时间尺度,一旦超过了该尺度,混沌对滑坡预测有显著影响。换句话说,确定性预测不能没有任何时间限制地进行,应该具有一定的可预报时间尺度。

### 1. 长期预报

长期预报指从滑坡演化的线性阶段(减速蠕变)开始后预测滑坡发生时间。从 NDS 理论知道,当系统远离失稳态时,滑坡系统大多处于无序状态,混沌对滑坡未来的演化影响很大,即系统的长期行为不能被准确预测。

### 2. 中期预报

中期预报指从滑坡演化的非线性阶段(等速蠕变)开始后预测滑坡发生时间。在此阶段,混沌的影响开始明显增长,在可预报时间尺度范围内,可以进行确定性预测。如果滑坡发生在此时间尺度范围内,预测误差可能较小,否则将会很大。总之,中期预报具有很强的不确定性。

### 3. 临滑预报

临滑预报指当滑坡体处于极不稳定状态(加速蠕变)时,开始预测滑坡发生时间。在此阶段,早期在滑坡演化中存在的随机和难以察觉的内部因素及触发因素等变得更明显了,容易被观测到。我们能够把它们作为初始条件的一部分来推断即将发生的滑坡。NDS 理论、岩石破坏试验与地震数据分析<sup>[30]</sup>都说明,岩体失稳过程是一降维、有序过程,因此可以推断,失稳前滑坡系统的有序度将增加、混沌性将减弱。再者,由于预测时间范围较短,混沌的影响可以忽略,因此,临滑预报能够相对准确地作出。例如,新滩滑坡的成功预报就是根据临滑前的前兆破坏现象作出的。

我们认为,确定性预测与非确定预测的结合将是滑坡预报研究的一个新特点,加强中期预报研究、重点突破临滑预报问题,将是目前和将来的主要研究课题。

## 第六节 滑坡演化的非线性动力学模型

### 一、引言

应用 NDS 理论研究滑坡是大有裨益的,但在实际应用中有许多问题需要解决。应用

NDS 理论研究滑坡问题的一般途径是：先写出系统的动力学方程组且求解；然后研究解的特性；最终探索各种复杂现象的起源。令人遗憾的是，描述滑坡演化过程的动力学方程迄今未能正确写出，目前能得到的唯一信息是观测数据和现象的描述。这就是说，我们知道动力学方程的一系列特解。如果我们把这样的解作为动力学方程的一系列离散值，那么较理想的滑坡演化动力学方程可通过反演算法得到。

本节的目的是提供一个应用 NDS 理论于滑坡预测的基本框架。为此，我们建议了一个滑坡发展过程的非线性动力学模型，通过改进的反演算法确定其模型参数。然后，给出了 Lyapunov 指数的计算方法和反映滑坡演化状态的稳定性判别准则。最后，通过一个实例分析验证了模型的有效性。

## 二、反演算法与改进的迭代反演算法

把滑坡发展过程看作一个非线性动力学系统(NDS)。滑坡 NDS 包含  $n$  个相互作用的分量  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。对一个特定的系统，这些分量可能包括描述构造、岩性及水文等条件的各种因素或变量。

设系统状态  $q_i$  随时间演变的物理规律为：

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n), (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-20)$$

式中， $f_i$  为  $q_1, q_2, \dots, q_n$  的一般非线性函数。

假定  $f_i$  有  $G_k$  项和相应  $P_k$  个参数 ( $k=1, 2, \dots, K$ )，即： $f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{k=1}^K G_k P_k$ 。如果观测数据能够组成  $M$  个方程，写成矩阵形式为：

$$D = GP \quad (4-21)$$

式中， $D = [q_i^{(j+1)\Delta t} - q_i^{(j-1)\Delta t}] / (2\Delta t) (j=2, 3, \dots, M+1)$  为  $M$  列差分方程； $G$  为  $M \times K$  阶观测数据矩阵； $P$  为  $K$  列参数矩阵。

在多数情况下，用最小二乘法解方程(4-21)时，方程(4-21)的解通常是不稳定的，因为  $G^T G$  是一个奇异矩阵或接近奇异矩阵，该矩阵的解对观测数据误差特别敏感<sup>[31]</sup>。Backus and Gilbert<sup>[32]</sup> 为克服这一困难，曾提出了广义线性反演算法，下面是这一算法的简要描述。

$G^T G$  是一  $K$  阶实对称矩阵，它的特征值依其绝对值大小可排列为：

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_K| \quad (4-22)$$

设有  $L$  个非零特征值，而  $K-L$  个特征值为零(或接近于零，其判别准则为  $(|\lambda_i| < 10^{-3} |\lambda_1|)$ ，对应于此  $L$  个特征值的标准化特征向量可组成一个  $K \times L$  阶的矩阵  $U$ ，式中， $U_i = (U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{iK})$ ，( $i=1, 2, \dots, L$ ) 是对应于  $\lambda_i$  的特征向量。

计算  $V_i = \frac{1}{\lambda_i} G U_i$ ，可得  $M \times L$  阶矩阵  $V$ 。方程(4-21)可重新整理为：

$$P = U B^{-1} V^T D \quad (4-23)$$

用上式可确定参数矩阵  $P$ 。式中， $B$  为由不为零的特征值组成的对角矩阵。

实际研究发现<sup>[7]</sup>，当观测周期较短时，仅用上述算法反演，预测精度常不能满足要求。为此，秦四清等提出了如下的迭代反演改进算法。

对方程(4-21)，按最小二乘法准则，可得到如下正则方程：

$$G^T G P = G^T D \quad (4-24)$$

以由式(4-23)解出的参数矩阵  $P$  作为初始估计解向量  $P^{(0)} = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_K^{(0)})$ ，用 Gaussian - Sidel 迭代公式

$$P_i^{(T+1)} = P_i^{(T)} + \frac{1}{G_{ii}} [e_i - \sum_{j=1}^K C_{ij} P_j^{(T)}] \quad (4-25)$$

进行迭代，直到满足：

$$|P_i^{(T+1)} - P_i^{(T)}| < E \quad (4-26)$$

式中， $T=0, 1, 2, \dots$  是迭代次数； $C_{ij}$  是矩阵  $G^T G (i=1, 2, \dots, K)$  的元素； $e_i$  是矩阵  $G^T D$  的列元素； $E$  是允许的绝对误差。

### 三、滑坡演化的非线性动力学分析

#### 1. 模型

描述滑坡发展过程可能需要许多状态变量(观测序列)，但考虑到某些变量具有相关性，因此选择一些具有高置信度的序列作为状态变量是合理的。为简化分析，我们选择 3 个状态变量建立滑坡演化过程的非线性动力学模型。

假定  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  是三个不同的观测序列，如应力、位移和降雨。考虑到  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  量纲与大小不同，在计算前应该被标准化。一般的标准化方法是该序列的每一个观测值除以其平均值。假定方程(4-20)中的  $f_i$  是关于系统物理特性的非线性函数，不妨设其为如下一般的表达式<sup>[31]</sup>。

$$\frac{dX}{dt} = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 X^2 + a_5 Y^2 + a_6 Z^2 + a_7 XY + a_8 XZ + a_9 YZ \quad (4-27)$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4 X^2 + b_5 Y^2 + b_6 Z^2 + b_7 XY + b_8 XZ + b_9 YZ \quad (4-28)$$

$$\frac{dZ}{dt} = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4 X^2 + c_5 Y^2 + c_6 Z^2 + c_7 XY + c_8 XZ + c_9 YZ \quad (4-29)$$

式中， $a_1, a_2, \dots, a_9, b_1, b_2, \dots, b_9$  与  $c_1, c_2, \dots, c_9$  是用上述改进反演算法解得的常数。对方程(4-27)、(4-28)和(4-29)用 Runge - Kutta 法作数值积分，可求出预测值，比较监测值和预测值可估计预测精度。

已应用上述非线性动力学模型研究了一些滑坡和地震，如四川华蓥山市溪口镇滑坡、唐山地震等，分析结果令人满意。

#### 2. Lyapunov 指数、Kolmogorov 熵、信息维与可预报时间尺度

Lyapunov 指数与相空间中邻近轨道的指数发散或收敛有关，可定性和定量描述动力学行为。具有一个或多个正的 Lyapunov 指数的系统定义为混沌系统<sup>[27]</sup>。以下是根据非线性动力学模型求解 Lyapunov 指数的方法简介。

由方程(4-27)、(4-28)和(4-29)组成的 Jacobi 矩阵  $J$  为：

$$J = \begin{bmatrix} \partial \dot{X} / \partial X & \partial \dot{X} / \partial Y & \partial \dot{X} / \partial Z \\ \partial \dot{Y} / \partial X & \partial \dot{Y} / \partial Y & \partial \dot{Y} / \partial Z \\ \partial \dot{Z} / \partial X & \partial \dot{Z} / \partial Y & \partial \dot{Z} / \partial Z \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

式中,  $\dot{X} = dX/dt$ ,  $\dot{Y} = dY/dt$ ,  $\dot{Z} = dZ/dt$ 。

根据 NDS 理论, Lyapunov 指数  $\lambda$  可根据下述方程解出:

$$\begin{bmatrix} \partial\dot{X}/\partial X - \lambda & \partial\dot{X}/\partial Y & \partial\dot{X}/\partial Z \\ \partial\dot{Y}/\partial X & \partial\dot{Y}/\partial Y - \lambda & \partial\dot{Y}/\partial Z \\ \partial\dot{Z}/\partial X & \partial\dot{Z}/\partial Y & \partial\dot{Z}/\partial Z - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4-31)$$

方程(4-31)可重写为:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (4-32)$$

式中:

$$A = -\left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial z}\right) \quad (4-33)$$

$$B = \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial z} \frac{\partial\dot{z}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial z} \frac{\partial\dot{z}}{\partial y} \quad (4-34)$$

$$C = \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\dot{y}}{\partial z} \frac{\partial\dot{z}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial z} \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \frac{\partial\dot{z}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial\dot{y}}{\partial z} \frac{\partial\dot{z}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial z} \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \frac{\partial\dot{z}}{\partial y} \quad (4-35)$$

解方程(4-32)、(4-33)、(4-34)和(4-35)可求得三个 Lyapunov 指数( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ )。 $\lambda$  代表在相空间中沿特定方向的系统状态误差的指数增长率。如果在一个系统中产生的误差随时间逐渐增长, 显然它的长期行为是不可预测的。如果要进行预测, 必须有可预报时间尺度限制。所有正的 Lyapunov 指数之和为:

$$K_1 = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \quad (4-36)$$

称为 Kolmogorov 熵<sup>[28]</sup>, 它表示一个物理系统的信息平均产生率。 $1/K_1$  是系统的平均可预报时间尺度, 表示这样的误差增长一倍需要的时间, 显然, 这个量对滑坡预测是很有用的。

Kaplan and Yorke<sup>[27]</sup>推测 Lyapunov 信息维  $d$  与 Lyapunov 指数谱的关系为:

$$d = T + \sum_{i=1}^T \frac{\lambda_i}{|\lambda_{T+1}|} \quad (4-37)$$

式中,  $T$  是满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_T \geq 0$  的最大正整数。显然, 定常吸引子、周期吸引子与拟周期吸引子的信息维数都是整数, 分别是 0, 1, 2, 而混沌吸引子的维数是小数, 这是判断系统处于混沌态的另一个标志。

### 3. 系统稳定性判据

Routh-Hurwitz 准则<sup>[33]</sup>给出了系统稳定性的充要条件, 即

$$A > 0, \quad AB > C, \quad C > 0 \quad (4-38)$$

式中,  $A$ 、 $B$  与  $C$  可分别用方程(4-33)、(4-34)与(4-35)解得。如果方程(4-38)满足, 滑坡的演化状态是稳定的; 否则是不稳定的。

## 四、实例研究

1988 年 4 月, 发现新滩滑坡后的坡体已开始复活变形。1988 年 5 月至 1990 年 2 月的位移观测值( $X$ )、地下水位监测值( $Y$ )与应力监测值( $Z$ )<sup>[34]</sup>如图 4-16 所示。

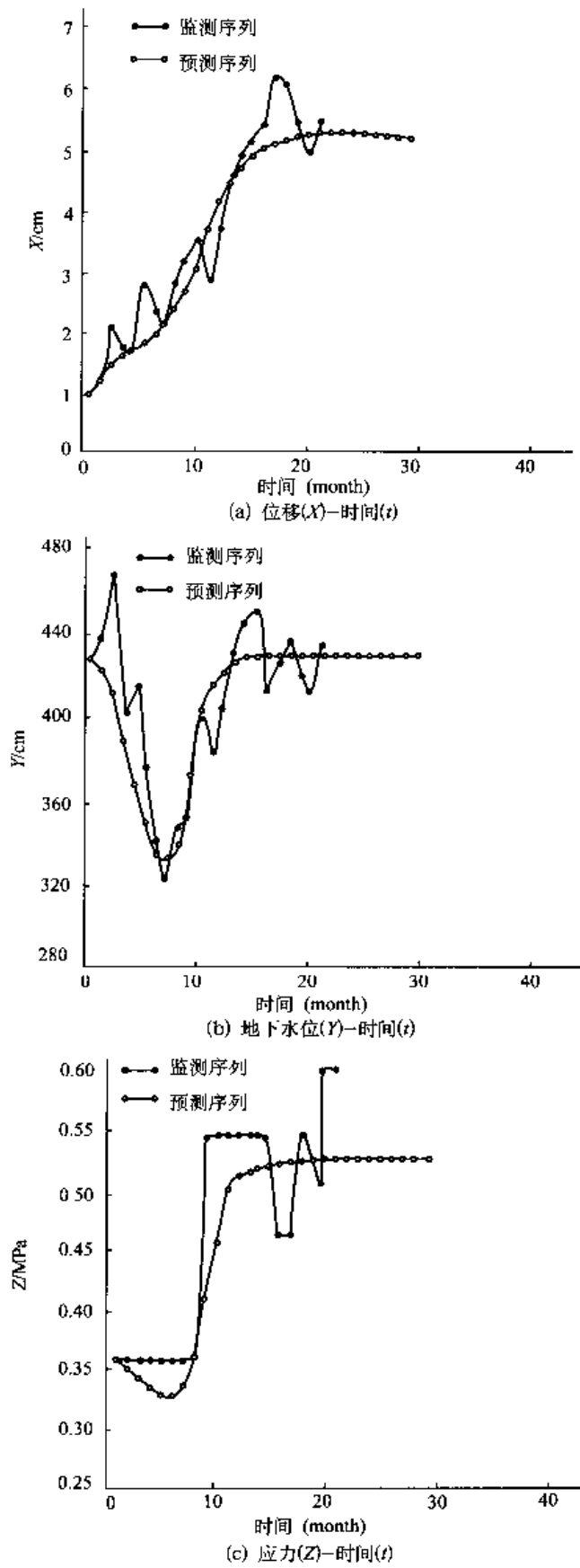
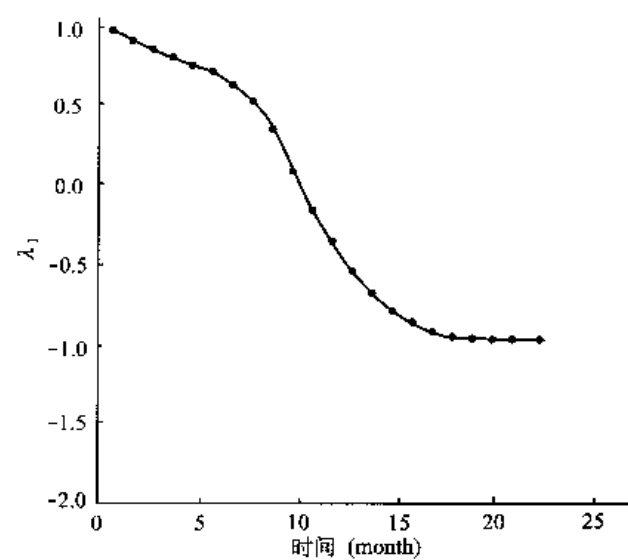
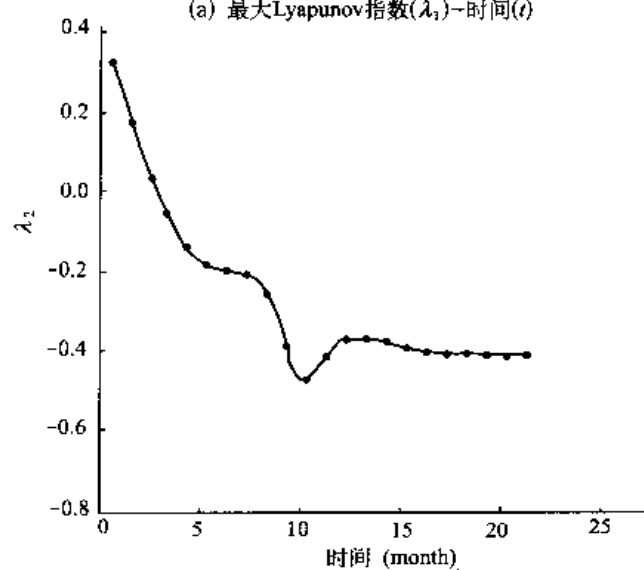


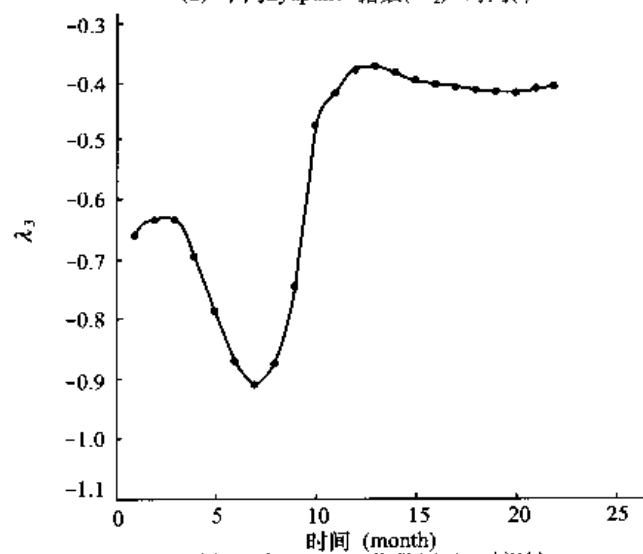
图 4-16 监测值与预测值对比



(a) 最大Lyapunov指数( $\lambda_1$ )—时间( $t$ )



(b) 中间Lyapunov指数( $\lambda_2$ )—时间( $t$ )



(c) 最小Lyapunov指数( $\lambda_3$ )—时间( $t$ )

图 4-17 Lyapunov 指数随时间的变化

先对监测值标准化, 然后用上述改进的迭代反演算法确定方程(4-27)、(4-28)与(4-29)中的未知参数。迭代允许绝对误差为  $E = 10^{-4}$ , 迭代次数为 35000, 反演得到的非线性动力学模型如下:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = & -1.0320X - 3.5487Y + 4.1215Z + 0.1360X^2 + 0.0784Y^2 - 3.0090Z^2 \\ & + 1.3044XY - 0.9707XZ + 3.0576YZ \end{aligned} \quad (4-39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} = & 0.8787X - 2.1705Y + 1.6519Z + 0.1047X^2 + 0.5600Y^2 - 1.6399Z^2 \\ & - 1.1660XY + 0.0319XZ + 1.7832YZ \end{aligned} \quad (4-40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = & 1.5146X - 2.4316Y + 1.6311Z + 0.1547X^2 + 0.9064Y^2 - 1.2434Z^2 \\ & - 1.0064XY - 0.7451XZ + 1.2895YZ \end{aligned} \quad (4-41)$$

对方程(4-39)~(4-41)用 Runge-Kutta 法作数值积分, 经量纲还原后可得到预测值(图 4-16)。监测值与预测值的平均相对误差对  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  序列分别为 7%、6% 和 10%, 这说明建立的新滩滑坡的非线性动力学模型较为理想。

图 4-17 示出了 Lyapunov 指数  $\lambda_i (i=1, 2, 3)$  随时间的变化, 很明显  $\lambda_i$  的符号随时间的演变为:  $(+, +, -) \rightarrow (+, 0, -) \rightarrow (+, -, -) \rightarrow (0, -, -) \rightarrow (-, -, -)$ 。这表明坡体由混沌运动经周期运动又向确定性运动演进, 显示出不确定性与复杂性的特点。

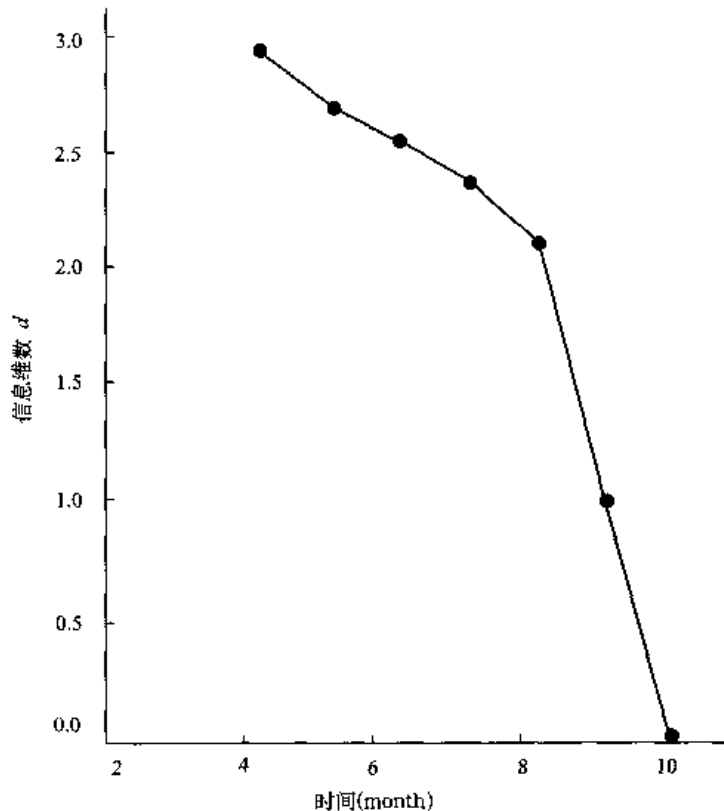


图 4-18 信息维数随时间的变化

由式(4-36)可计算  $K_1$ ,  $K_1$  的平均值是 0.73, 可确定平均可预报时间尺度为 1.37 月, 即在 1990 年 3 月至 1990 年 4 月 11 日间, 可进行确定性预测, 超出此时间范围, 预测误差将变得很大。

Lyapunov 信息维数  $d$  随时间的变化如图 4-18 所示。可发现在斜坡演化过程中存在着类似于岩石变形破坏的降维、有序现象。稳定性分析表明, 该坡体向稳定态演化, 这与该斜坡目前处于稳定状态的现实一致。

## 参 考 文 献

- [1] 李如生. 非平衡态热力学和耗散结构. 北京: 清华大学出版社, 1986.
- [2] 仪垂祥. 非线性科学及其在地学中的应用. 北京: 气象出版社, 1995.
- [3] Haigh M J. Dynamic systems approaches in landslide hazard research. *Z. Geomorph. N. F. Suppl.* - Bd, 67: 79 ~ 91. 1998.
- [4] Keilis - Borok V I. The lithosphere of the earth as a nonlinear system with implications for earthquake prediction. *Rev. Geophys.*, 28: 19 ~ 34. 1990.
- [5] Phillips J D. Nonlinear dynamical systems in geomorphology: revolution or evolution *Geomorphology* 5, 219 ~ 229. 1992.
- [6] Philips J D. Instability and chaos in hillslope evolution. *Am. J. Sci.*, 293: 25 ~ 48. 1993.
- [7] 秦四清, 张倬元, 王士天, 黄润秋. 非线性工程地质学导引. 西南交通大学出版社, 1993.
- [8] Phillips J. Nonlinear dynamics and the evolution of relief. *Geomorphology* 14: 57 ~ 64. 1995.
- [9] Hongre L, Salliac P, Alexandrescu M, Dubois J. Nonlinear and multifractal approaches of the geomagnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 110: 157 ~ 190. 1999.
- [10] Malanson G P, Butler D R, and Georgakakos K P. Non - equilibrium geomorphic processes and deterministic chaos. *Geomorphology* 5: 311 ~ 322. 1992.
- [11] Turcotte D L. *Fractals and chaos in geology and geophysics* (second edition). Cambridge Univ. Press: New York. 1997.
- [12] Zeng X, Pielke R A and Eykholt R. Chaos theory and its applications to the atmosphere. *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 74: 631 ~ 644. 1993.
- [13] Saito M. Forecasting time of slope failure by tertiary creep. *Proc. Seventh Int Conf. On Soil Mech. and Found. Eng'g*, Montreal. 667 ~ 683. 1969.
- [14] Fukuzono T. A new method for predicting the failure time of a slope, *Proc. IV International Conference and Field Workshop on landslide*, Tokyo. 1985.
- [15] Voight B. Materials science law applies to time forecasts of slope failure. *Landslide News* (3): 8 ~ 11. 1989.
- [16] 唐春安. 岩石声发射规律数值模拟初探. *岩石力学与工程学报*, 1997, Vol. 16, No. 4, 368 ~ 374.
- [17] 黄润秋, 张倬元, 王士天. 黄河拉西瓦水电站高边坡稳定性的系统工程地质研究. 成都科技大学出版社, 1991.
- [18] 庆祖荫. 半岩性土高速滑坡形成机制及龙羊峡库岸滑坡评价. *中国典型滑坡*. 科学出版社, 1988.
- [19] 郑再胜. 岩石变形中的能量传递过程与岩石变形力学分析. *中国科学(D 辑)*, 1990, No. 5, 612 ~ 619.
- [20] Mogi K. *Earthquake Predication*, Tokyo, Academic Press. 1985.
- [21] 蔡静观, 许昭水等. 云南地区强震前孕震系统的非线性阶段. *地震研究*, 1993, Vol. 16, No. 4. 20 ~ 26.
- [22] Sheko A I. Theoretical principles of regional temporary prediction of relative landslide risk. *Bull. of IAEG*, No. 16. 1977.
- [23] Fussanger E et al. Some remarks of the recent conditions related to the development and prognosis of sliding movements in the plynchoid rocks of the Carpathians. *Bull. Of IAEG*, No. 16. 1977.
- [24] 杨毅. 重正化群方法在地震预报中的应用. *西北地震学报*, 1989, Vol. 11, No. 4.
- [25] 李后强, 程光钺. 分形与分维——探索复杂性的新方法. 四川教育出版社, 1990.
- [26] Shaw R. Strange attractors, chaotic behavior, and information flow. *Z. Naturforsch.*, 36a, 80 ~ 112. 1981.
- [27] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, and Vastano J A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16D,



285 ~ 317. 1985.

- [28] 胡平, 杨培才, 李卫, 赵蒙. 地震过程动力学行为和可预报性问题研究. 地球物理学报, 1990, 33(6): 632 ~ 640.
- [29] Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D, Vol. 9, 189 ~ 208. 1983.
- [30] Hirata T, Satoh T, Ito K. Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock. Geophys. J. R. astr. Soc. 90: 369 ~ 374. 1987.
- [31] 黄建平, 衣育红. 利用观测资料反演非线性动力学模型. 中国科学(B辑), 1991, 3, 331 ~ 336.
- [32] Bakus, G, Gilbert, F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 266 (1173): 123 ~ 192. 1970.
- [33] Puccia C J, Levins R. Qualitative modeling of complex systems. Harvard Univ. Press, Cambridge, MA. 61 ~ 70. 1985.
- [34] 周萃英. 滑坡灾害的复杂性理论研究. 中国地质大学(武汉). 博士学位论文, 1992.

# 第二篇 土体剪切变形过程的 极限状态分析理论

应用我们在第二章提出的极限状态分析非线性理论，分别研究了库仑主动土压力产生的条件与刚性抗拔桩极限承载力确定方法，提出了与前人研究思路完全不同的研究方法，成功解释了一些试验与观测结果。

## 第五章 非线性库仑主动土压力分析理论

### 第一节 引言

挡土墙土压力的计算是岩土力学与工程设计中的一个经典问题。1776年，库仑(Coulomb)<sup>[1]</sup>根据墙后土楔处于极限平衡状态时的力学平衡条件，提出了计算土压力的理论和方法，称为库仑土压力理论。其后朗肯(Rankine)<sup>[2]</sup>于1857年发表了当土单元体达到极限平衡条件的朗肯土压力理论。此后，许多学者，如Terzaghi和Peck<sup>[3~5]</sup>等，对土压力的计算理论和方法进行了研究，扩展了这两个著名的古典土压力理论的应用范围。按照库仑和朗肯理论，土压力沿墙高的分布是线性的，而实测结果表明<sup>[4]</sup>，土压力的分布有的是线性的，有的是非线性的。因此，Karah<sup>[4]</sup>基于库仑土压力滑动楔体方法提出了水平微分单元体极限平衡分析方法，虽解释了土压力的非线性分布问题，但在研究方法上存在着一些缺陷。

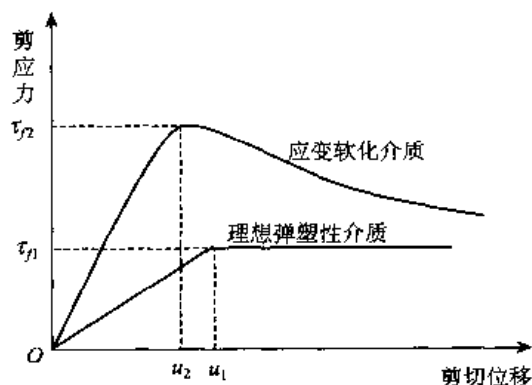


图 5-1 应变软化介质和理想弹塑性介质的剪切本构曲线

上述的土压力研究，都以极限平衡理论为基础，虽有计算简便等优点，但从研究方法上来说都存在着以下缺陷：①不能考虑挡土墙的位移和土体的本构关系；②当挡墙位移较小时，沿滑动面的土体不可能全部达到极限平衡状态，较可能的是部分土体达到极限平衡状态。这样将不能按照朗肯或库仑理论的方法计算土压力；③只适用于同一种介质，并且具有同样的应力应变属性（如应变软化或理想弹塑性）（如图 5-1 所示）；或适用于不同介质在某一变形时，同时达到峰值强度（如图 5-2 所示），否则不能按库仑理论进行分析。而实际

上通过试验研究发现<sup>[6,7]</sup>，不同的介质具有不同的应力应变属性，同一种介质也可能具有不同的应力应变属性(如第二章图 2-2、2-3 所示)，因为土体剪切应力应变属性与应力水平、排水条件、固结程度、饱和状态和密实程度等密切相关。如对挡墙后填土为砂土的情况(如图 5-3)，上部土体的垂向应力和围压较小，沿滑移面剪切带的土体可能呈疏松状态，表现为应变硬化行为；而下部剪切带的土体可能由于密实呈现应变软化行为。对这样挡墙的土压力，按照库仑理论将难以判断土体在应力应变曲线哪个点上，滑移面剪切带的土体全部进入临界破坏状态，即极限平衡状态。计算具有不同应力应变属性介质相互作用产生的土压力，需发展新的土压力计算理论。

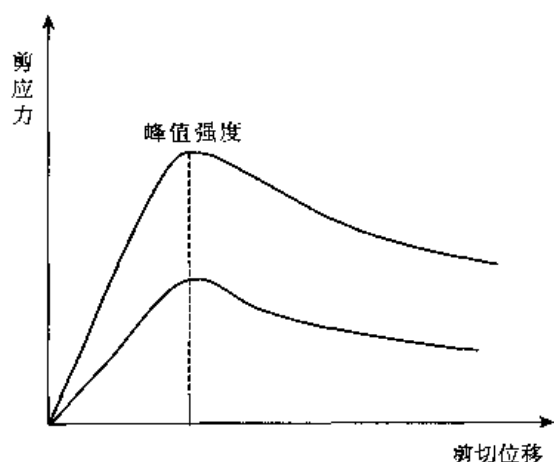


图 5-2 同时达到峰值强度时两种介质的剪切本构曲线

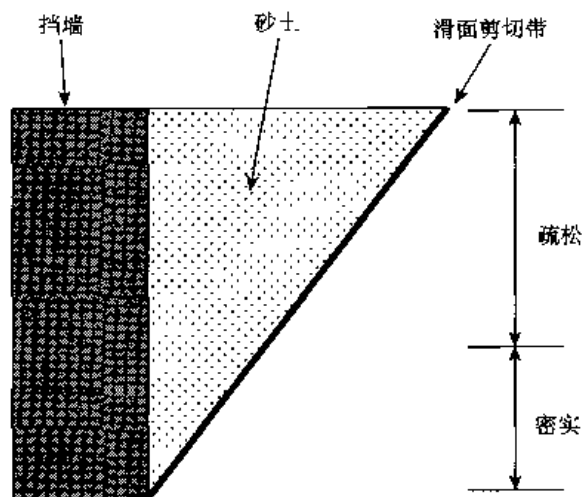


图 5-3 墙后土体由疏松砂和密实砂组成时的滑动土楔

突变理论是 Thom<sup>[8]</sup>发展的一种用于模拟不连续突变现象的数学技术，实际上也是一种求系统极值的理论，已在岩土力学的诸多方面得到应用<sup>[9~11]</sup>。土体从弹塑性变形状态进入临界破坏状态是一种状态突变行为，可用突变理论进行研究，用它可以研究滑移面剪切带的土体进入临界破坏状态时所需的力学条件。

本章把墙后土体看作由两种具有不同应力应变性质的介质组成，一种具有应变硬化或弹塑性(含理想弹塑性)性质，另一种具有应变软化属性，据此研究两种不同属性介质相互作用产生的土压力。研究给出了产生主动土压力的必要条件和充要条件，提出了与前人研究思路和方法完全不同的新的非线性土压力理论，深化了对土压力有关问题的认识。

## 第二节 基于库仑主动土压力的非线性分析理论

### 一、土压力分析模型

墙后填土的研究对象可以是砂土、黏土或其他不同深度具有不同应力应变属性(应变硬化和应变软化性质)的分层填土。在研究中采用如下假设：

- 1) 墙背竖直且光滑，与填土之间不存在摩擦力，这样可不考虑墙背与土的本构

关系。

2) 墙后填土的滑动面可以是曲面或直线滑动面, 为简化分析, 本文假定为直线滑动面。

3) 填土沿两个平面同时下滑(图 5-4): 一个是墙背  $AB$  面, 另一个是土体内某一滑动面  $BC$ (具有一定厚度的剪切带), 楔体  $ABC$  将同时向水平方向和垂直向下方向移动, 这样墙将向前平移。当墙向前平移的位移较小时, 可近似认为滑动长度  $BC$  保持不变。

4) 在滑动过程中, 假定楔体  $ABC$  内的应力、应变变化很小, 这样可不考虑滑动楔体内部的应力和变形条件, 以使研究聚焦于主动土压力产生的本质规律。

如图 5-4 所示, 作用在滑动楔体上的力有自重力  $W$ (土体平均重度用  $\gamma$  表示); 墙对土上的主动土压力  $P$ , 其作用点可根据土压力强度沿墙高  $H$  的分布确定; 设沿滑移面剪切带产生的总抗剪切力为  $T$ 、总法向力为  $N$ ;  $\beta$  为填土面与水平面的夹角;  $\theta$  为滑移面与水平面夹角;  $H_s$  和  $H_h$  分别为应变软化介质和应变硬化介质的土层厚度, 其厚度的确定可通过钻孔垂向连续取样, 根据三轴压缩试验得到的应力应变曲线型式, 确定从硬化(含理想塑性)到软化转折点对应的取样深度, 这样即能计算出  $H_s$  和  $H_h$ 。 $l_s$  和  $l_h$  分别为应变软化介质和应变硬化介质沿滑移面的长度。

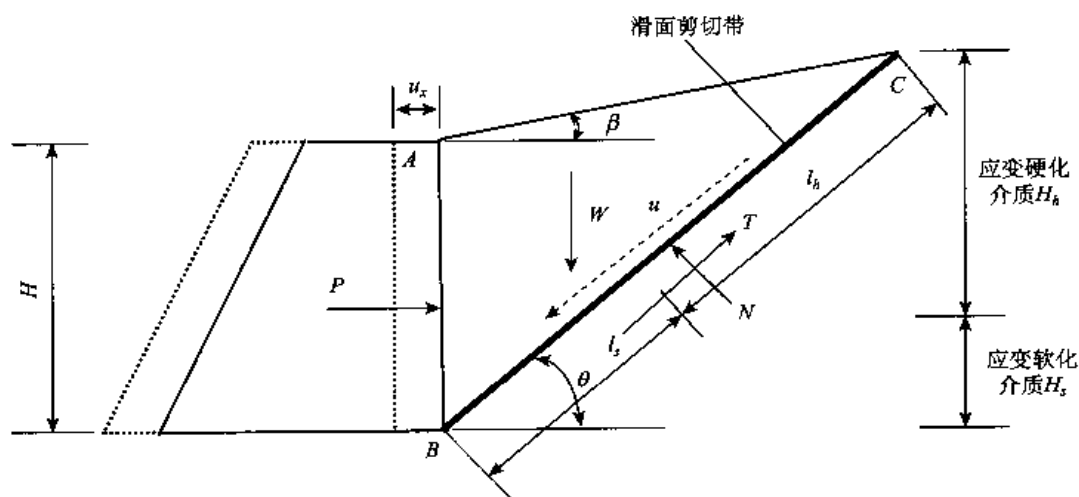


图 5-4 由应变硬化介质和应变软化介质组成的滑动楔体及主动土压力计算模型

设滑面剪切带的厚度均匀为  $h$ , 其应变软化介质与应变硬化介质的本构模型分别采用第二章公式(2-1)和(2-5), 如第二章图 2-13 所示。

## 二、尖点突变模型

根据陈仲颐等人<sup>[12]</sup>的研究, 当墙向前平移时, 产生主动土压力所需的位移  $u_x$  很小, 对密砂和中密砂来说其  $u_x/H = (0.1 \sim 0.5)\%$ 。在下面的研究中, 假设位移  $u_x$  很小, 且  $l_s$  和  $l_h$  均远大于  $u_x$ 。

取挡土墙单位宽度, 滑动楔体系统的总势能可表达为:

$$V = \begin{cases} \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^u \frac{G_1 u}{h} l_h du + P u \cos\theta - W u \sin\theta, & (u \leq u_h) \\ \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^{u_h} \frac{G_1 u}{h} l_h du \\ \quad + \int_{u_h}^u \left[\tau_h + \frac{G_2(u - u_h)}{h}\right] l_h du + P u \cos\theta - W u \sin\theta, & (u > u_h) \end{cases} \quad (5-1)$$

式中,  $u$  为滑动楔体沿滑移面剪切带的蠕滑位移, 且相应墙体的平移为  $u_x = u \cos\theta$ 。

根据几何关系有:

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\cos\beta \cos\theta}{\sin(\theta - \beta)} \quad (5-2)$$

$$l = H \frac{\cos\beta}{\sin(\theta - \beta)} \quad (5-3)$$

$$l_s = \frac{H_s}{\sin\theta} \quad (5-4)$$

$$l_h = l - l_s \quad (5-5)$$

依据库仑主动土压力的理论解要求<sup>[12]</sup>, 在应用式(5-2)和(5-3)时, 要求  $\theta > \beta$ , 否则不可能产生主动土压力。令  $dV/du = 0$ , 可得:

$$V' = \begin{cases} \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_1 u}{h} l_h + P \cos\theta - W \sin\theta = 0, & (u \leq u_h) \\ \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_2 u}{h} l_h + \left(\tau_h - \frac{G_2 u_h}{h}\right) l_h + P \cos\theta - W \sin\theta = 0, & (u > u_h) \end{cases} \quad (5-6)$$

式(5-6)显然是力的平衡条件, 在突变理论分析中称为平衡曲面。根据平衡曲面的光滑性质, 由  $V''' = 0$ , 可求得尖点, 即

$$u_1 = u = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} u_0 \quad (5-7)$$

这样, 可容易知道尖点处位移值, 恰为滑面应变软化性质区段介质本构曲线拐点处的位移值。

将平衡曲面方程(5-6), 相对于尖点处状态变量值  $u_1$  作 Taylor 展开, 截取至 3 次项, 并作变量代换可得到尖点突变<sup>[8]</sup>的标准形式为:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (5-8)$$

其中:

$$x = \frac{u - u_1}{u_1} \quad (5-9)$$

$$a = \frac{6}{(m+1)^2} (k-1) \quad (5-10)$$

$$b = \frac{6}{m(m+1)^2} (mk+1-\xi) \quad (5-11)$$

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \quad (5-12)$$

$$\xi = \begin{cases} \frac{(W \sin \theta - P \cos \theta) h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s u_1}, & (u_h \geq u_1) \\ \frac{\left[ W \sin \theta - P \cos \theta - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h \right] h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s u_1}, & (u_h < u_1) \end{cases} \quad (5-13)$$

式中,  $G_h = G_1 (u_h \geq u_1)$  或  $G_h = G_2 (u_h < u_1)$ 。 $k$  为滑面剪切带应变硬化介质的剪切刚度 ( $k_h = G_h l_h / h$ ), 与对应于本构曲线拐点处、应变软化介质的剪切刚度的绝对值 ( $k_s = |m G_s l_s \exp [-(m+1)/m]| / h$ ) 之比, 称之为刚度比;  $\xi$  与滑楔土体重量、墙对土的作用力、系统的几何尺寸及介质的力学参数等有关, 称为几何-力学参数。

在满足式(5-8)的力的平衡条件中, 为求得  $P$  的极小值, 可对  $x$  求导得:

$$3x^2 + a = 0 \quad (5-14)$$

联立式(5-8)和式(5-14), 并消去  $x$  得:

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 4\beta^3 (k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 (1 + mk - \xi)^2 = 0 \quad (5-15)$$

式中,  $\beta$  为参数和式且有  $\beta = 6/(m+1)^2$ 。

式(5-15)在突变理论分析中称为分岔集方程。当式(5-15)满足时, 表示沿滑动面剪切带的土体整体上进入临界破坏状态, 达到极限平衡要求, 此时  $P$  值为所求最小主动土压力。式(5-15)称为产生主动土压力的充要条件。

### 三、产生主动土压力的必要条件

由式(5-15)知, 只有当  $k \leq 1$  时, 分岔集方程才有可能满足, 因此, 产生主动土压力的必要条件为:

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq 1 \quad (5-16)$$

如果  $k > 1$ , 土压力将介于主动土压力和静止土压力之间。由式(5-16)可知, 在其他参数不变的情况下,  $k$  随  $m$  的增大而减小。 $m$  值越大(刚度比越小), 即材料的均匀性越高, 越易产生主动土压力。

我们可以对  $k$  越小, 土体越易进入临界破坏状态的原因作如下解释。当  $k$  较小时, 应变软化介质的峰后曲线越陡, 在峰后强度某个变形增量  $\Delta u$  时, 其承担的剪切应力下降很大, 应变硬化介质将承担更大的剪切应力而进入临界破坏状态, 这样滑移面剪切带的土体整体上进入破坏状态。显然, 只有当变形进入应变软化介质的峰后变形阶段时, 才可能有  $k \leq 1$ , 这说明强度准则只是判别土体进入临界破坏状态的必要条件之一。

由式(5-14)可解得达到临界破坏状态时, 即产生主动土压力的临界位移值:

$$u_b = u_1 \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{m+1} (1-k)^{1/2} \right], (k < 1) \quad (5-17)$$

当  $k=1$  时,  $u_b = u_1$ ; 当  $k=0$  时,  $u_b = u_1 [1 - 1.4142/(m+1)]$  (要求  $m \geq 0.4142$ )。可看出, 随  $k$  减小, 产生主动土压力所需的临界位移减小。理论证实<sup>[10]</sup>,  $u_b$  介于应变软化介质峰值强度对应的位移与拐点位移之间。利用上式可计算达到主动土压力所需的临界位移, 若实测挡墙水平位移值小于临界水平位移 ( $u_b \cos \theta$ ), 表明作用在挡墙上的土压力未达

到主动土压力，土压力将介于静止土压力和主动土压力之间。如对宽度很大、高度较小的刚性挡墙，由于其位移很小，可能不产生主动土压力，如果按照主动土压力设计挡墙，将是不合理和偏于危险的。

#### 四、总主动土压力

由式(5-13)和式(5-15)可解得总主动土压力( $b < 0$ )为：

$$P = \begin{cases} W \tan \theta - \frac{G_s l_s u_1}{h \cos \theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} + 1 + mk \right], (u_h \geq u_1) \\ W \tan \theta - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) \frac{l_h}{\cos \theta} - \frac{G_s l_s u_1}{h \cos \theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \times \\ \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} + 1 + mk \right], (u_h < u_1) \end{cases} \quad (5-18)$$

将式(5-2) ~ (5-4)及式(5-5)代入式(5-18)，得到：

$$P = \begin{cases} \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\cos \beta \sin \theta}{\sin(\theta - \beta)} - \frac{2G_s H_s u_1}{h \sin 2\theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} + 1 + mk \right], (u_h \geq u_1) \\ \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\cos \beta \sin \theta}{\sin(\theta - \beta)} - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) \left[ \frac{H \cos \beta}{\sin(\theta - \beta) \cos \theta} - \frac{2H_s}{\sin 2\theta} \right] \\ - \frac{2G_s H_s u_1}{h \sin 2\theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} + 1 + mk \right], (u_h < u_1) \end{cases} \quad (5-19)$$

其中， $k = \frac{\sin \theta G_h \left[ \frac{H \cos \beta}{\sin(\theta - \beta)} - \frac{H_s}{\sin \theta} \right]}{m G_s H_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)$ 。

可以看出，总主动土压力除与  $H$ 、 $H_s$ 、 $\theta$ 、 $\beta$ 、 $u_1$ 、 $\gamma$ 、 $\tau_h$ 、 $u_h$ 、 $G_s$  等有关外，还与介质的刚度比  $k$  及材料的均匀性指标  $m$  有关。

当  $\beta = 0$  时，式(5-19)可简化为：

$$P = \begin{cases} \frac{1}{2} \gamma H^2 - \frac{2G_s H_s u_1}{h \sin 2\theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} + 1 + mk \right], (u_h \geq u_1) \\ \frac{1}{2} \gamma H^2 - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) \frac{2(H - H_s)}{\sin 2\theta} - \frac{2G_s H_s u_1}{h \sin 2\theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \times \\ \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} + 1 + mk \right], (u_h < u_1) \end{cases} \quad (5-20)$$

式中， $k = \frac{G_h (H - H_s)}{m G_s H_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)$ 。

从图 5-5 可知(取  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $H = 8 \text{ m}$ ,  $H_s = 2 \text{ m}$ ,  $G_h = 20 \text{ kPa}$ ,  $G_s = 4500 \text{ kPa}$ ,  $u_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\tau_h = 12 \text{ kPa}$ ,  $u_h = 0.05 \text{ m}$ ), 随  $m$  增大, 在  $m < 1$  时,  $P$  增大, 并在  $m = 1$  时取得极大值, 而后随  $m$  的增大  $P$  减小。

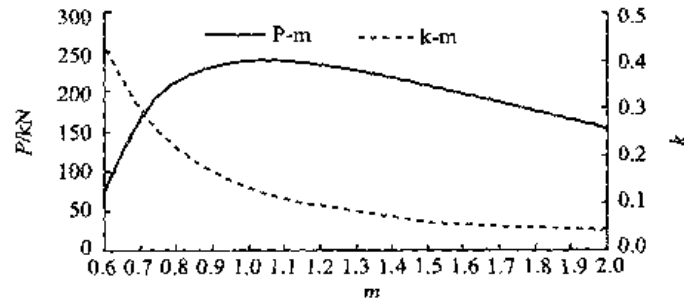


图 5-5  $P \sim m$  和  $k \sim m$  关系

## 五、与经典朗肯、库仑主动土压力的比较

为与经典库仑主动土压力进行比较, 考虑土体仅由一种应变软化介质组成, 即  $H = H_s$ ,  $k = 0$  则由式(5-20)得到:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 - \frac{2G_s H u_1}{h \sin 2\theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} + 1 \right] \quad (5-21)$$

将式(5-2)和(5-3)代入式(5-21), 得到:

$$W \sin \theta - P \cos \theta = T_p f(m) \quad (5-22)$$

其中,

$$\begin{cases} f(m) = \left[ \frac{(m+1)^{\frac{1}{m}}}{e} \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} \right) \right] \\ T_p = \tau_p l \\ l = \frac{H}{\sin \theta} \end{cases} \quad (5-23)$$

式中,  $e$  为自然指数;  $\tau_p$  为峰值强度。在  $m$  可能的取值范围内 ( $0.4142 \leq m \leq 3$ ),  $f(m)$  的变化为  $1.090 \sim 0.997$ ,  $f(m)$  为接近 1 的常数。从式(5-6)知道,  $f(m)$  应恒等于 1,  $f(m)$  不等于 1 的原因是我们对式(5-6)作 Taylor 展开时进行了截断处理。这样式(5-22)可近似写为:

$$W \sin \theta - P \cos \theta = T_{\max} \quad (5-24)$$

根据莫尔-库仑破坏准则, 有:

$$\tau_p = \frac{N}{l} \tan \varphi + c \quad (5-25)$$

式中,  $c$  为土体黏聚力。利用滑动面法向力的平衡条件得到:

$$N = W \cos \theta + P \sin \theta \quad (5-26)$$

联立式(5-25)和(5-26), 并利用式(5-2), 可解得:



$$P = \frac{\frac{1}{2}\gamma H^2 [\sin 2\theta - (1 + \cos 2\theta \tan \varphi)] - 2cH}{(1 - \cos 2\theta) \tan \varphi + \sin 2\theta} \quad (5-27)$$

为求得主动土压力强度  $\sigma_a$  随深度  $z$  的变化, 令  $H = z$ ,  $z$  为距填土表面的距离, 可求得:

$$\sigma_a = \frac{dP}{dz} = \frac{\gamma z [\sin 2\theta - (1 + \cos 2\theta \tan \varphi)] - 2c}{(1 - \cos 2\theta) \tan \varphi + \sin 2\theta} \quad (5-28)$$

当  $\theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  时, 容易得到最大  $\sigma_a$  为:

$$\sigma_a = \gamma z \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5-29)$$

式(5-29)为朗肯主动土压力公式。当  $c=0$  时, 为库仑主动土压力公式。可见朗肯或库仑土压力理论只是本文非线性分析理论的特例。

如前所述, 墙后土体即使是同一种介质, 也可能具有完全不同的应力应变属性。由此可知, 经典朗肯或库仑土压力理论实际上只适用于具有同一应力应变属性的同一介质, 其实际应用范围是很有限的。

## 六、主动土压力强度与深度的关系

为求得主动土压力强度沿墙高的分布规律, 令  $z = H$ ,  $z$  为距填土表面的距离, 并假设参数  $k, m, G_h, G_s, H_s, u_1, \tau_h, u_h$  不随  $z$  变化, 对式(5-20)求导可得:

$$\sigma_a = \frac{dP}{dz} = \begin{cases} \gamma z - \frac{2G_h u_1}{h \sin 2\theta} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{m+1} \left[ 1 - \frac{G_h(z-H_s)}{mG_s H_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \right]^{1/2} \right\}, (u_h \geq u_1) \\ \gamma z - \frac{2}{\sin 2\theta} \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) - \frac{2G_h u_1}{h \sin 2\theta} \times \\ \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{m+1} \left[ 1 - \frac{G_h(z-H_s)}{mG_s H_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \right]^{1/2} \right\}, (u_h < u_1) \end{cases} \quad (5-30)$$

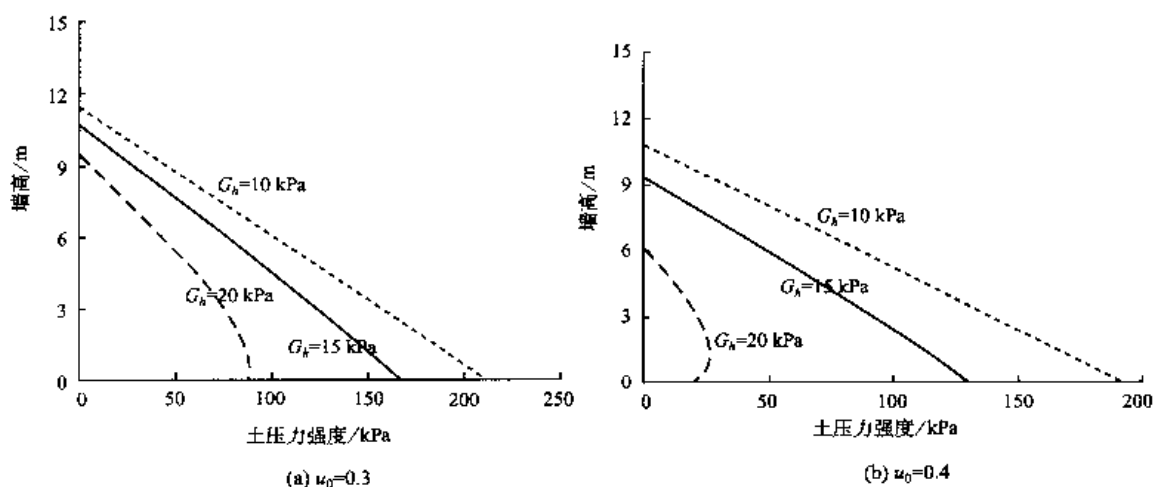
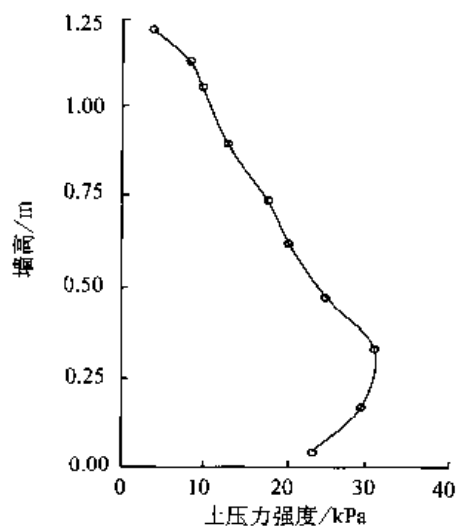
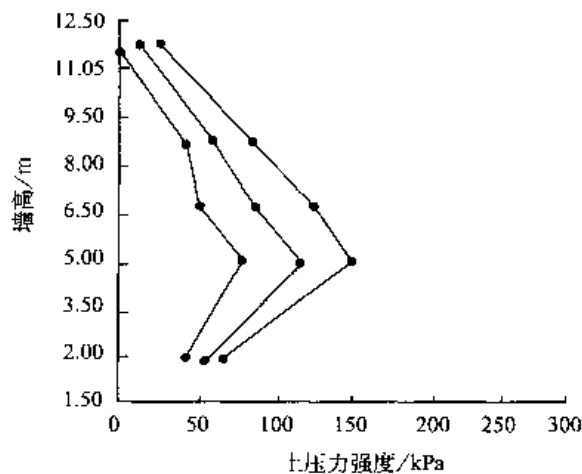


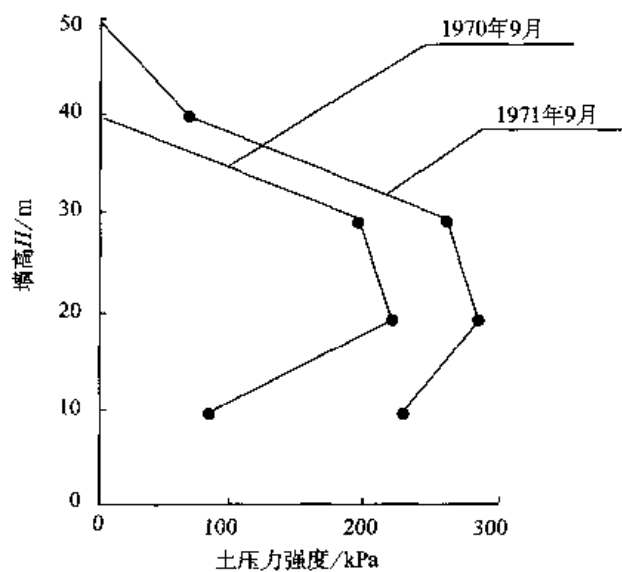
图 5-6 理论主动土压力强度随墙高的变化



(a) 墙后填土为砂土、挡墙平移时的室内模型试验实测土压力<sup>[13]</sup>



(b) 伏尔加水电部船闸闸墙不同时间实测土压力(填土为砂土)<sup>[4]</sup>



(c) 丹江口水电站混凝土挡墙上不同时间实测土压力(填土为黏土)<sup>[4]</sup>

图 5-7 实测主动土压力强度随墙高的变化

显然,  $\sigma_a$  与深度  $z$  的关系是非线性的, 而不是朗肯或库仑理论的线性关系。当只有应变软化介质而无应变硬化介质时, 即  $z = H_s$ ,  $k = 0$  时,  $\sigma_a$  与深度  $z$  的关系是线性的。也可看出,  $G_h$ ,  $u_1$  与  $z$  对  $\sigma_a - z$  的非线性关系有重要影响。

取  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $m = 1$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ ,  $G_s = 4500 \text{ kPa}$ ,  $\tau_h = 25 \text{ kPa}$ ,  $u_h = 0.1 \text{ m}$ ,  $H_s = 0.5 \text{ m}$ ,  $H = 15 \text{ m}$ ,  $\theta = 45^\circ$ , 当  $G_h = 10, 15, 20 \text{ kPa}$  时, 研究  $\sigma_a$  随深度  $z$  的变化规律。从图 5-6 看出, 当  $G_h$  较小时,  $\sigma_a$  随深度  $z$  的变化是近似线性的,  $G_h$  较大时, 非线性关系较明显;  $u_0$  越大,  $\sigma_a - z$  的非线性关系越明显。

图 5-7 给出室内模型试验和挡土墙实测土压力的分布, 其分布为非线性的, 证实本文提出的非线性土压力理论的合理性。

### 第三节 结 论

1) 基于不同的土体介质有不同的应力应变属性, 同一种介质也可能具有不同的应力应变属性的理念, 应用突变理论方法, 研究当挡墙墙背竖直、光滑, 并且墙后土体由应变硬化介质与应变软化介质组成时, 两种介质相互作用产生主动土压力的非线性理论。发现产生土压力的必要条件是: 滑面剪切带应变硬化介质的等效剪切刚度( $k_h = G_h l_h / h$ ), 与对应于本构曲线拐点处、应变软化介质的等效剪切刚度的绝对值( $k_s = |m G_s l_s \exp[-(m+1)/m]| / h$ )之比不大于 1, 并给出了产生主动土压力的充要条件和临界位移值。

2) 研究发现, 总主动土压力与刚度比  $k$  和材料均匀性指标  $m$  有重要相关性。

3) 当填土面水平且土体仅由应变软化介质组成时, 通过与经典库仑和朗肯土压力理论比较, 认识到这两种理论只是本文提出的非线性理论( $k = 0$  时)特例。

4) 土压力强度  $\sigma_a$  随深度  $z$  的变化是非线性的关系。当  $k = 0$  时,  $\sigma_a - z$  的关系是线性的; 当应变硬化介质的剪切模量  $G_h$  较小时,  $\sigma_a - z$  关系呈近似线性关系; 当  $G_h$  较大时,  $\sigma_a - z$  关系为明显的非线性关系。随应变软化介质本构曲线拐点位移  $u_1$  的增大, 这种非线性关系越明显。

### 参 考 文 献

- [1] Coulomb C. A. Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelque problèmes de statique. Memoire Académie Royale des Sciences, Paris. 1776.
- [2] Rankine W J M. On the stability of loose earth[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147(1): 9 ~ 27. 1857.
- [3] Terzaghi K, Peck R B. Soil Mechanics in Engineering practice (Second Edition) [M]. New York: John Wiley and Sons. 1967.
- [4] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2001.
- [5] Rowe P W, Peaker K. Passive earth pressure measurements[J]. Geotechnique, 15(1): 57 ~ 78. 1965.
- [6] Cho G C. Unsaturated soil stiffness and post-liquefaction shear strength [Ph. D. Thesis] [D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, USA. 2001.
- [7] 王成华, 李广信. 土体应力-应变关系转型问题分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(8): 1185 ~ 1190.
- [8] Thom R. Stabilité structurelle et morphogénèse [M]. New York: Benjamin. 1972.
- [9] Qin S Q, Jiao J J, Wang S J. A cusp catastrophe model of instability of slip-buckling slope [J]. Rock Mechanics and

Rock Engineering, 34(2): 119 ~ 134. 2001.

- [10] Qin S Q, Jiao J J, Wang S J. A nonlinear catastrophe model of instability of planar - slip slope and chaotic dynamical mechanisms of its evolutionary process [J]. International Journal of Solids and Structures, 38(4): 8093 ~ 8109. 2001.
- [11] 高鹏, 艾南山. 土质滑坡体破坏的突变模型[J]. 工程地质学报, 1994, 2(4): 67 ~ 75.
- [12] 陈仲颐, 周景星, 王洪玮. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [13] 姚辉, 王浩芬. 刚性挡土墙主动土压力试验研究[J]. 水运工程, 1991, 10(9): 18 ~ 21.

# 第六章 刚性抗拔桩的极限承载力 非线性分析理论

## 第一节 引言

抗拔桩<sup>[1]</sup>常用于地下构筑物(如地下车库和地下变电站等)的抗浮和受较大弯矩作用的高耸构筑物的基础(如桥梁、电力与电视输变线塔等)。对这种基础的设计,常基于承载力控制,即根据抗拔桩的极限侧阻(一般为抗压桩极限侧阻的50%~90%)确定极限抗拔承载力,然后除以安全系数得到设计承载力。与承压桩相比,人们对抗拔桩工作机理的认识要肤浅得多,有关这方面的资料、研究报告也较少。抗拔桩的极限抗拔力<sup>[2]</sup>主要受两方面因素控制:一是结构物本身的强度;二是桩周土的性质以及接触面的几何特征和材料的物理力学性质等。一般来说,抗拔桩的破坏形态可分为3类:①倒锥台剪切破坏;②沿接触面剪切破坏;③复合剪切破坏。

抗拔桩极限承载力的确定是岩土工程师非常关注的问题。现有的极限承载力设计方法多采用理论、试验与经验方法,其研究思路如图6-1所示。理论计算公式是先假定桩的破坏面形态,然后利用土压力系数、桩上摩擦角、桩周破裂角等参数确定极限承载力,其中土压力系数主要采用静止土压力系数和主动土压力系数<sup>[2~5]</sup>。由于涉及的参数多,公式复杂,应用于实际工程比较困难。经验公式是利用试验桩的实测资料,采用“容许承载力”的概念确定承载力。

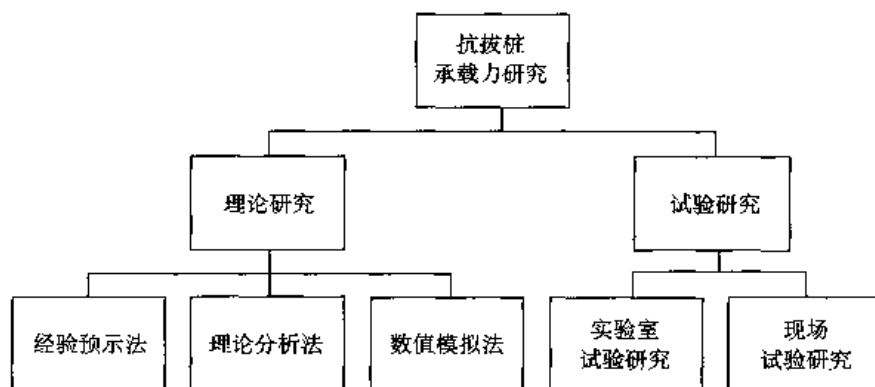


图 6-1 抗拔桩承载力研究思路

由于影响抗拔桩承载力的因素很多<sup>[6~7]</sup>,如:桩的类型及施工方法,桩的长度,地基土的类别,土层的形成历史,桩的加载历史,荷载的特性,桩周土内应力状况变化等。现有的抗拔桩极限承载力计算都是以极限平衡理论为基础的,存在着以下缺陷:①不能考虑

桩体的位移和土体的本构关系；②当桩体位移较小时，桩体周围的土体不可能全部达到极限平衡状态，较可能的是部分土体达到极限平衡状态；③只适用于同一种介质，并且具有同样的应力应变属性(如应变软化或理想弹塑性)(图 5-1)；或适用于不同介质在某一变形时，同时达到峰值强度(图 5-2)。事实上，同一种介质也可能具有不同的应力应变属性(图 6-2)，因为土体剪切应力应变属性与应力水平、排水条件、固结程度、饱和状态和密实程度等密切相关。

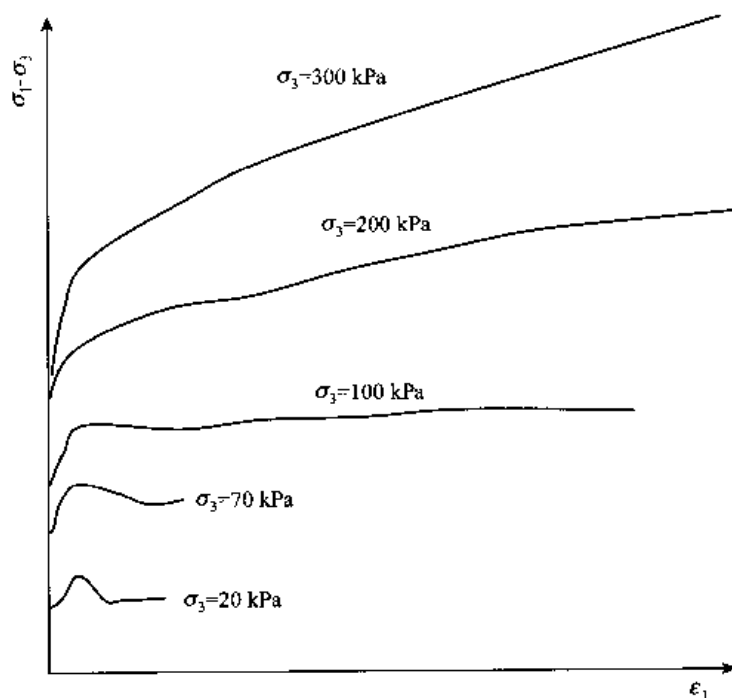


图 6-2 黄土应力应变关系测试结果<sup>[8]</sup>

突变理论是 Thom<sup>[9]</sup>发展的一种用于模拟不连续突变现象的数学技术，实际上也是一种求系统极值的理论，已在岩土力学的诸多方面得到应用<sup>[10~11]</sup>。土体从弹塑性变形状态进入临界破坏状态是一种状态突变行为，可用突变理论进行研究，用它可以计算桩体周围剪切带具有不同应力应变属性的土体进入临界破坏状态时所需的力学条件。

下述研究把桩周土体看作由两种具有不同应力应变属性的介质组成，一种具有应变硬化或弹塑性(含理想弹塑性)性质，另一种具有应变软化属性，据此研究产生极限抗拔力的必要条件和充要条件。

## 第二节 确定抗拔桩极限承载力的非线性分析理论

### 一、力学模型

桩周土体可以是砂土、黏土或在不同深度具有不同应力应变属性(应变硬化和应变软化性质)的岩土介质。在研究中采用如下假设：

- 1) 桩体为刚体，这样可不考虑桩体本身变形的影响；

2) 为简化分析, 忽略桩体本身自重的影响;

3) 桩体受力后产生向上的位移, 桩体与周围土体之间的剪切带为均匀分布, 剪切带厚度用  $h$  表示。

如图 6-3 所示, 桩体受到的上拔力为  $P_u$ ; 桩与其周围土体的剪切位移为  $u$ ; 桩体总长度为  $H$ ;  $l_s$  和  $l_h$  分别为应变软化介质和应变硬化介质沿桩体的长度 ( $H = l_s + l_h$ )。

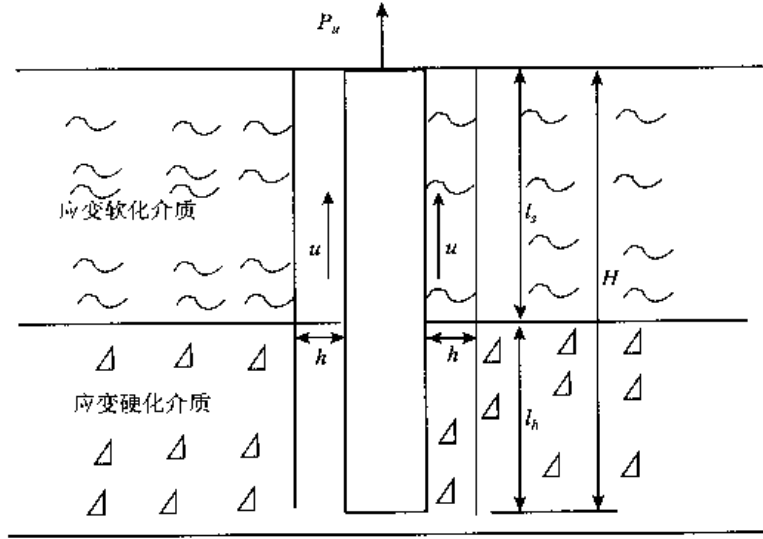


图 6-3 由应变硬化介质和应变软化介质组成的单桩承载力计算模型

应变软化介质与应变硬化介质的本构模型分别采用式(2-1)和式(2-5), 如第二章图 2-13 所示。

## 二、尖点突变模型

假定  $l_h$  和  $l_s$  远大于  $u$ , 并在剪切过程中保持不变, 则桩上界面系统的总势能可表达为:

$$V = \begin{cases} \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s w \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^u \frac{G_1 u}{h} l_h w du - P_u u, & (u \leq u_h) \\ \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s w \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^{u_h} \frac{G_1 u}{h} l_h w du + \int_{u_h}^u \left[\tau_h + \frac{G_2(u - u_h)}{h}\right] l_h w du - P_u u, & (u > u_h) \end{cases} \quad (6-1)$$

式中,  $w$  为剪切的横截面周长, 其表达式为  $w = 2\pi r$ ,  $r$  为桩半径。

令  $dV/du = 0$ , 可得:

$$V' = \begin{cases} \left\{ \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_1 u}{h} l_h \right\} w - P_u = 0, & (u \leq u_h) \\ \left\{ \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_2 u}{h} l_h + \left(\tau_h - \frac{G_2 u_h}{h}\right) l_h \right\} w - P_u = 0, & (u > u_h) \end{cases} \quad (6-2)$$

上式显然是力的平衡条件, 在突变理论分析中称为平衡曲面。根据平衡曲面的光滑性质, 由  $V'' = 0$ , 可求得尖点, 即

$$u_1 = u = \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{1}{m}} u_0 \quad (6-3)$$

容易知道尖点处的位移值，恰为剪切面应变软化介质本构曲线拐点处的位移值。

将平衡曲面式(6-3)相对于尖点处状态变量值  $u_1$  作 Taylor 展开，截取至 3 次项并作变量代换得到尖点突变<sup>[11]</sup>的标准形式：

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (6-4)$$

其中：

$$x = \frac{u - u_1}{u_1} \quad (6-5)$$

$$a = \frac{6}{(m+1)^2} (k-1) \quad (6-6)$$

$$b = \frac{6}{m(m+1)^2} (mk+1-\xi) \quad (6-7)$$

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \quad (6-8)$$

$$\xi = \begin{cases} \frac{P_u h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s w u_1}, & (u_h \geq u_1) \\ \frac{\left[ P_u - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h w \right] h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s w u_1}, & (u_h < u_1) \end{cases} \quad (6-9)$$

式中， $G_h = G_1 (u_h \geq u_1)$  或  $G_h = G_2 (u_h < u_1)$ 。参数  $k$  为剪切面应变硬化介质的等效剪切刚度 ( $k_h = G_h l_h / h$ )，与对应于本构曲线拐点处、应变软化介质的等效剪切刚度的绝对值 ( $k_s = |m G_s l_s \exp[-(m+1)/m]| / h$ ) 之比，称之为刚度比；参数  $\xi$  与压力、系统的几何尺寸及介质的力学参数等有关，称为几何-力学参数。

在满足式(6-4)的力的平衡条件中，为求得  $P_u$  的极值，可对  $x$  求导，得到：

$$3x^2 + a = 0 \quad (6-10)$$

联立式(6-4)和式(6-10)，消去  $x$ ，得到：

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 4\beta^3 (k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 (1+mk-\xi)^2 = 0 \quad (6-11)$$

式中， $\beta = 6/(m+1)^2$ 。

方程(6-11)在突变理论分析中称为分岔集方程。当式(6-11)满足时，表示滑动面介质整体上进入了临界破坏状态，达到了极限平衡要求，此时  $P_u$  值即为所求极值。方程(6-11)称为达到极限状态的充要条件。

### 三、系统达到极限状态的必要条件

由式(6-12)知，只有当  $k \leq 1$  时，分岔集方程才有可能满足，因此，系统达到极限状态的必要条件为：

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq 1 \quad (6-12)$$



由式(6-12)知,在其他参数不变的情况下, $k$ 随 $m$ 的增大而减小。 $m$ 值越大(刚度比越小),即材料的均匀性越高,越易达到极限状态。

由式(6-11)可解得达到临界破坏状态时的临界位移值:

$$u_b = u_1 \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{m+1} (1-k)^{1/2} \right], (k < 1) \quad (6-13)$$

当 $k=1$ 时, $u_b = u_1$ ; 当 $k=0$ 时, $u_b = u_1 [1 - 1.4142/(m+1)]$  (要求 $m \geq 0.4142$ )。可看出随 $k$ 减小,系统达到极限状态所需的临界位移减小。容易证明, $u_b$ 是介于应变软化介质峰值强度对应的位移与拐点位移之间。

#### 四、应变硬化属性介质与应变软化属性介质协同作用分析

实际上,方程(6-11)蕴涵着两种不同的极限状态模式,现分述如下。

**模式一:**当应变软化介质的承载力远大于应变硬化介质时,系统的极限状态将主要由应变软化介质的属性控制(图6-4(a))。当 $u_h \geq u_1$ 时, $G_h = G_1$ ,由式(6-11)和式(6-10)可得到其极限承载力表达式( $b < 0$ )为:

$$P_{\max}^1 = \frac{G_s l_s u_1 w}{h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ 1 + mk + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (6-14)$$

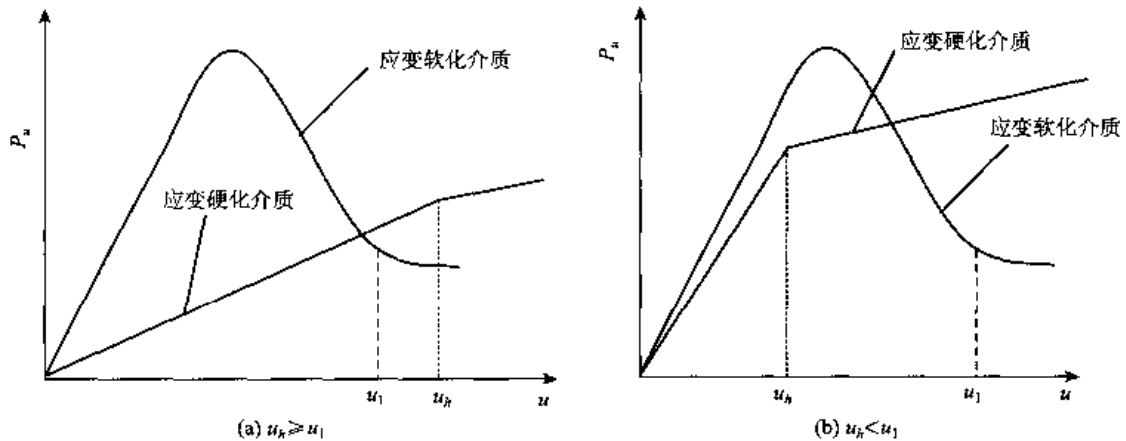


图 6-4 两种不同极限状态的  $P_u - u$  曲线

**模式二:**当系统的承载力由应变软化介质与应变硬化介质共同承担时,系统的极限状态将主要由两种介质的属性共同控制(图6-4(b))。当 $u_h < u_1$ 时, $G_h = G_2$ ,由式(6-11)和式(6-9)可得到其极限承载力表达式( $b < 0$ )为:

$$P_{\max}^2 = \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h w + \frac{G_s l_s u_1 w}{h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left[ 1 + mk + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (6-15)$$

由式(6-14)和式(6-15)可知,极限承载力除与桩体的几何尺寸、剪切模量等有关外,还与刚度比 $k$ 和材料均匀性指标 $m$ 有关,极限抗拔力由系统本身的几何特征与力学特性决定。

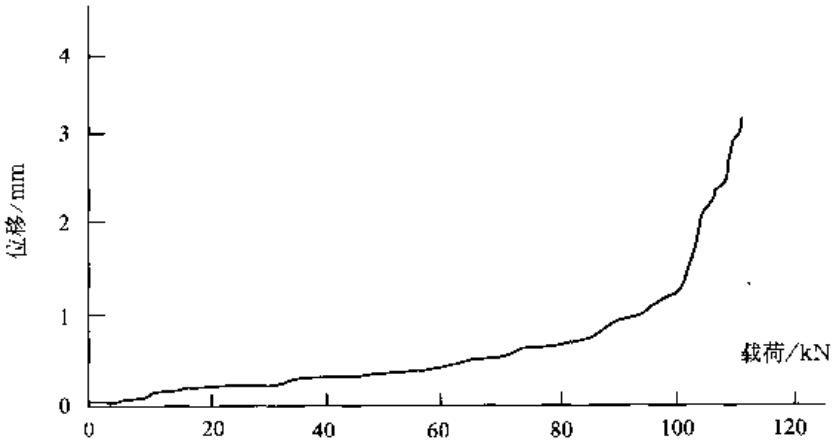
#### 五、实例分析

根据王卫东等<sup>[12]</sup>在软土地区的抗拔桩承载力试验结果,我们进行了实例验证。试验

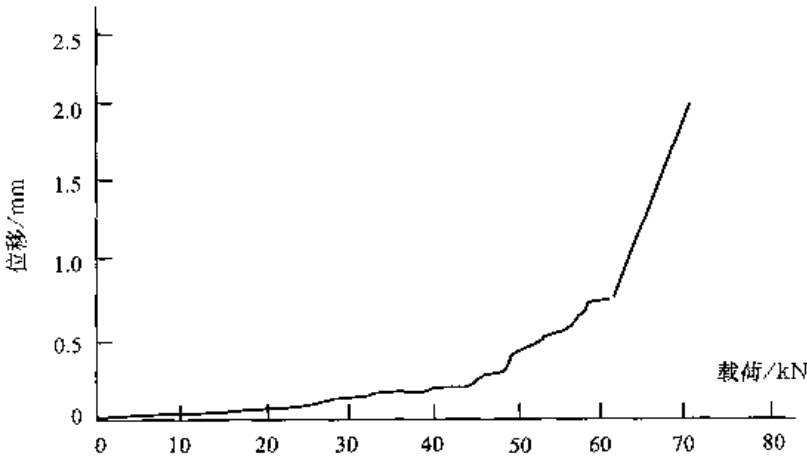
场地位于上海市区，属于滨海平原地貌，为典型的上海软土地层，表 6-1 为各土层的分布与物理力学参数指标，图 6-5 为桩体的荷载位移曲线。

表 6-1 地层特性表

| 层号             | 土层名称      | 层厚<br>(m) | 孔隙<br>比( <i>e</i> ) | 含水<br>率( <i>w</i> ) | 直剪固快<br>黏聚力<br><i>c</i> /kPa | 直剪固快<br>摩擦角<br><i>φ</i> /(°) | 比贯阻力<br><i>P<sub>s</sub></i> /MPa | 标准贯入<br>击数( <i>N</i> ) | 侧摩阻<br>力/kPa |
|----------------|-----------|-----------|---------------------|---------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|------------------------|--------------|
| 1              | 填土        | 1.6       |                     |                     |                              |                              |                                   |                        |              |
| 2              | 褐黄色粉质黏土   | 1.4       | 0.92                | 31%                 | 16                           | 18                           | 0.73                              | 3.6                    | 15           |
| 3              | 灰色淤泥质粉质黏土 | 5.5       | 1.22                | 39%                 | 2                            | 22                           | 0.7                               | 2.6                    | 15           |
| 4 <sub>1</sub> | 灰色淤泥质黏土   | 5.5       | 1.35                | 47%                 | 12                           | 18                           | 0.65                              | 2.2                    | 22           |
| 4 <sub>2</sub> | 灰色黏土      | 2.5       | 1.31                | 41%                 | 9                            | 19                           | 0.69                              | 3.2                    | 18           |
| 5              | 灰色粉质黏土    | 7.4       | 1.06                | 36%                 | 16                           | 12                           | 1.1                               | 4.5                    | 25           |
| 6              | 暗绿色黏土     | 5.1       | 0.71                | 28%                 | 20                           | 15                           | 2.65                              | 13.8                   | 40           |



(a) 1号桩体桩顶荷载位移曲线图 (桩长27 m)



(b) 2号桩体桩顶荷载位移曲线图 (桩长20 m)

图 6-5 试桩荷载位移曲线图

由图 6-6 可知，桩土界面的剪应力与相对位移的关系和土层的应力水平密切相关，上部土体表现为应变软化，随着土体应力水平的增加，软化现象减弱，当增大到一定程度后表现为应变硬化。

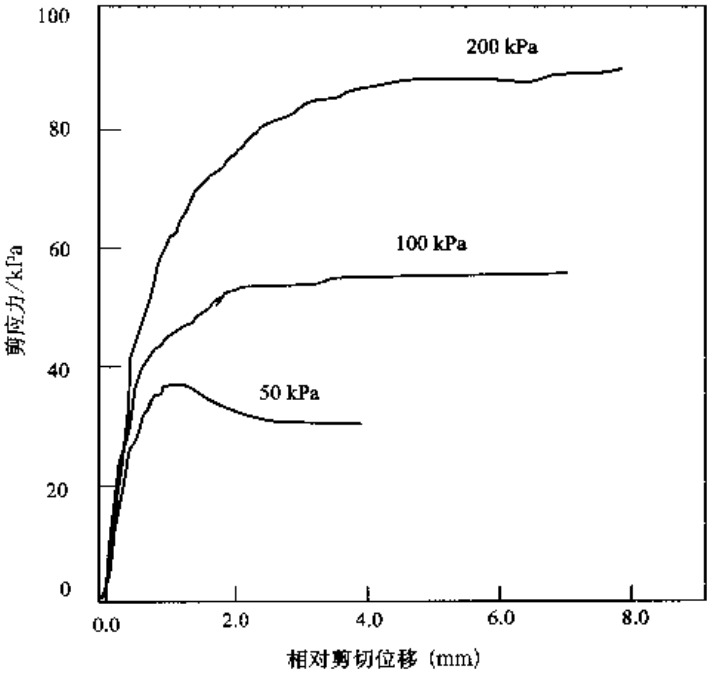


图 6-6 不同垂直压力下剪应力-相对剪切位移曲线<sup>[13]</sup>

对应于土体软化的极限剪切应力水平参考图 6-6 选取为  $\sigma = 50\text{ kPa}$ ，土体平均容重取为  $\gamma = 18\text{ kN/m}^3$ ，软土的泊松比取为  $\mu = 0.45$ 。采用静力总应力法分析，根据下式

$$\sigma = \frac{\mu}{1 - \mu} \gamma h_s \tag{6-16}$$

可求得土体的应变软化深度  $l_s = h_s = 22.7\text{ m}$ 。因此，1 号桩周围土体可分为具有应变软化属性和应变硬化属性的两层介质，2 号桩周围土体均为具有应变软化属性的介质。根据图 6-6 所示的本构曲线，通过式(2-1)和式(2-5)反演土体的剪切模量可得  $G_s = 600\text{ kPa}$ ， $G_h = 380\text{ kPa}$ 。剪切带  $h$  取值与桩体半径相当。在 1 号抗拔桩试验中，经过计算可知  $\tau_h > \frac{G_h u_h}{h}$ ，1 号抗拔桩的极限状态模式为模式 2，关于桩体的极限承载力计算公式为式(6-15)；2 号抗拔桩的极限状态模式为模式 1，极限承载力计算公式为式(6-14)。

由表 6-2 可知，理论计算结果与试验结果相当接近，误差在  $\pm 5\%$  以内，这表明我们提出的抗拔桩极限承载力非线性理论是合理有效的。需要指出的是，参数取值对抗拔桩极限承载力的计算结果有显著影响。

表 6-2 抗拔桩承载力计算值与试验值比较

| 编号 | $2r$<br>(m) | $h$<br>(m) | $G_s$<br>(kPa) | $G_h$<br>(kPa) | $\tau_h$<br>(kPa) | $u_0$<br>(m) | $l_s$<br>(m) | $l_h$<br>(m) | $m$ | $u_h$<br>(m) | 计算结果/kPa | 试验结果/kPa |
|----|-------------|------------|----------------|----------------|-------------------|--------------|--------------|--------------|-----|--------------|----------|----------|
| 1  | 0.45        | 0.225      | 600            | 380            | 25                | 0.02         | 22.7         | 4.3          | 1   | 0.01         | 992      | 998      |
| 2  | 0.4         | 0.20       | 600            | 380            | 25                | 0.02         | 20           | 0            | 1   | 0.01         | 600      | 618      |

### 第三节 结 论

1) 应用突变理论方法,研究了当刚性桩周围土体由应变硬化介质与应变软化介质组成时,确定极限承载力的方法,给出了产生极限承载力的充要条件和临界位移值。

2) 推导出了刚性抗拔桩极限承载力的两种理论计算公式,并通过工程实例进行比较,有效地论证了理论的正确性。

3) 关于抗拔桩极限承载力的非线性理论是基于简单模型提出的,与复杂的地质和施工情况有一定的出入,还需要进一步深入研究,以探讨其使用范围,及其在桩体非刚性条件下的适应性等等。

### 参 考 文 献

- [1] 朱碧堂,杨敏. 抗拔桩的变形与极限承载力计算. 建筑结构学报,2006,27(3):120~129.
- [2] 何思明. 抗拔桩破坏特性及承载力研究[J]. 岩土力学,2001,22(3):308~310.
- [3] Joseph E Bowles. Foundation Analysis and Design, Third edition, McGraw-Hill Book Company. 622~623. 1982.
- [4] Kulhawy F H, Kozera D W, and Withiam J L. Uplift testing of model drilled shafts in sand. J. Geotech. Engrg. Div, ASCE, 105(1): 31~47. 1979.
- [5] Nak Kyung Kim. Performance of Tension and Compression Anchors in Weathered Soil. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 12, 1138~1150. 2003.
- [6] 赵明华. 土力学与基础工程[M]. 武汉:武汉工业大学出版社,2003.
- [7] 刘祖德. 抗拔桩基础[M]. 北京:中国建材工业出版社,1996.
- [8] 陈宗基. 我国西北黄土的基本性质及其工程建议[J]. 岩土工程学报,1989, 11(6):9~23.
- [9] Thom R. Stabilité structurelle et morphogénèse[M]. New York: Benjamin. 1972.
- [10] Qin S Q, Jiao J J, Wang S J. A cusp catastrophe model of instability of slip-buckling slope[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 34(2): 119~134. 2001.
- [11] Qin S Q, Jiao J J, Wang S J. A nonlinear catastrophe model of instability of planar-slip slope and chaotic dynamical mechanisms of its evolutionary process[J]. International Journal of Solids and Structures, 38(4): 8093~8109. 2001.
- [12] 王卫东,吴江斌,许亮等. 软土地区扩底抗拔桩承载力特性试验研究[J]. 岩土工程学报,1997,29(9):1418~1422.
- [13] 钟闻华. 深长桩荷载传递特性与相互作用理论及应用研究[D]. 东南大学博士论文,2005,24~27.

# 第三篇 岩体物理失稳 非线性分析理论

由于应力状态变化及外部环境影响引起的介质物理力学性质变化而导致的失稳现象，称为物理失稳，如滑动类型的滑坡、地震及岩爆等。本篇主要研究具有确定滑动面的平面滑动型斜坡及沿弱面滑动的坝基岩体的物理失稳问题。

## 第七章 平面滑动斜坡失稳过程的 非线性演化机制与物理预报

### 第一节 引言

尽管在斜坡稳定性研究中，许多学者<sup>[1~8]</sup>已经做出了巨大的努力和探索。但失败于预测世界上很多灾难性滑坡的严酷事实说明，我们对滑坡失稳机制理解得还很少。在斜坡稳定性分析中常用的极限刚体平衡法，不能考虑斜坡的滑动位移，评价结果的可靠性值得怀疑。该法<sup>[3]</sup>不能解释安全系数小于1的斜坡处于稳定状态，而大于1的发生了滑坡这样的事实；也不能回答在暴雨条件下，即使两个斜坡的各种条件相同或相近，为何一个发生了滑坡，而另一个处于稳定状态的问题<sup>[5]</sup>。要解决这些问题，需要发展新的稳定性分析理论。

预测滑坡破坏时间的常用方法是经验的或统计的<sup>[9~17]</sup>，例如 Saito<sup>[9]</sup>根据第三阶段（加速）蠕变预报斜坡破坏时间，Voight<sup>[13]</sup>根据时间、位移和经验常数的统计函数提出了一个多参数预报公式，晏同珍等<sup>[18]</sup>用 Logistic 虫口模型  $dx/dt = Ax - Bx^2$ （ $x$  为位移， $A$  与  $B$  为常数）进行滑坡预报；黄润秋等<sup>[19]</sup>用  $dx/dt = Ax - Bx^3$  进行预报，并依据某些滑坡的观测数据进行事后检验，取得了好的效果。但这些统计预报都缺乏物理基础，不仅所用参数的物理意义不明确，而且预报结果与选用不同蠕变阶段的数据有关，常带有很大的主观随意性。正如 Rat（1988）<sup>[14]</sup>所指出的：统计预报方法一般是很不可靠的，常常是有“诡计”的。滑坡时间预报研究要取得重大进展，必须从统计预报转向物理预报。

与非线性动力学系统（NDS）理论相联系的概念和数学技术，已广泛应用于包括岩石力学和地质研究的很多方面<sup>[3,20~25]</sup>。这些概念包括混沌、分形几何和突变理论<sup>[26]</sup>。NDS 理论在滑坡研究中的应用给我们提供了一个很好的对滑坡机制研究作深入洞察的机会。秦四清等<sup>[27,28]</sup>，Tang<sup>[29]</sup>，Tang et al.<sup>[30]</sup>，与 Henley<sup>[21]</sup>等人分别在斜坡失稳、水库诱发地震、岩样失稳和断层运动研究中提出了一些尖点突变模型；Chau<sup>[4,6]</sup>用单变量和双变量摩擦定

律分析了蠕变斜坡的分岔。许多研究者<sup>[24,25,28,31]</sup>发现在斜坡演化过程中可能出现混沌。

混沌系统对初始条件扰动非常敏感,初始状态值的小误差会被迅速放大。由于初始条件观测和数值误差的不可避免性,一般认为,只要滑坡演化过程是混沌的,滑坡预报必须有可预报性的限制,即存在着可预报时间尺度(秦四清等<sup>[31]</sup>)。斜坡演化过程有混沌现象吗?导致混沌的条件和道路是什么?混沌与哪些力学参数有关?只有解决了这些问题,才能更好地评价斜坡稳定性并作出更准确的时间预报。

突变理论是 Thom<sup>[20]</sup>发展的一种用于模拟不连续突变现象的数学技术,因此,用突变理论研究滑坡更为合适。在本章中,我们将以平面滑动斜坡为例,考虑滑动面介质的不同力学属性,用突变理论研究它的失稳机制;在此基础上,考虑滑面介质的蠕变、加速度与环境因素特性,建立非线性动力学模型探索滑坡物理预报方法及混沌产生的条件和判据。

## 第二节 斜坡平面滑动失稳的尖点突变模型

### 一、力学模型

设滑面为一非均匀软弱夹层,上部岩体为刚体(如图 7-1 所示)。滑面倾角为  $\theta$ ,上部岩体的垂直高度为  $H$ ,软弱夹层厚为  $h$ ,上部岩体的重量为  $Wg$ , ( $g$  为重力加速度)。在岩体自重产生的下滑力作用下,岩体沿软弱夹层的蠕滑位移为  $u$ 。

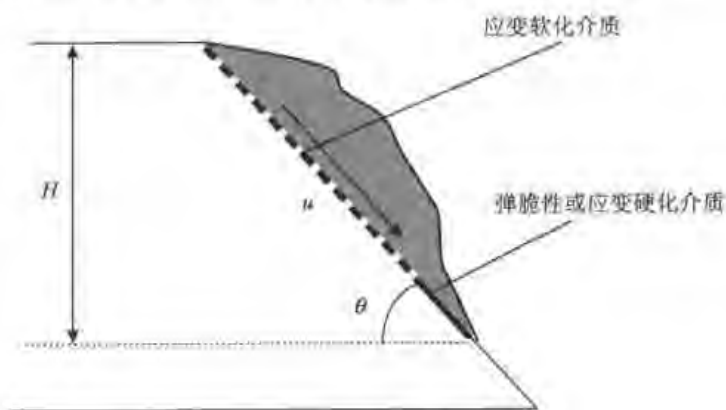


图 7-1 斜坡平面滑动失稳的力学模型

由于在软弱夹层不同部位的应力水平、材料组成及结构不同,夹层本身可能包含有多种具有不同力学属性的介质,如弹脆性、应变硬化与应变软化属性等。为简化分析,我们视夹层介质由两种介质组成,即介质 1 具有复杂的弹脆性(例如坚硬的岩块或岩桥)或应变硬化(例如硬黏土或疏松的砂土)属性,介质 2 具有应变软化属性(如图 7-2 所示)。

不管介质 1 是弹脆性的或是应变硬化的,将会得出一样的结论。为简化起见,在下面的分析中,我们仅考虑介质 1 的应变硬化属性。介质 1 和介质 2 的本构模型分别采用第二章式(2-5)和式(2-1)。

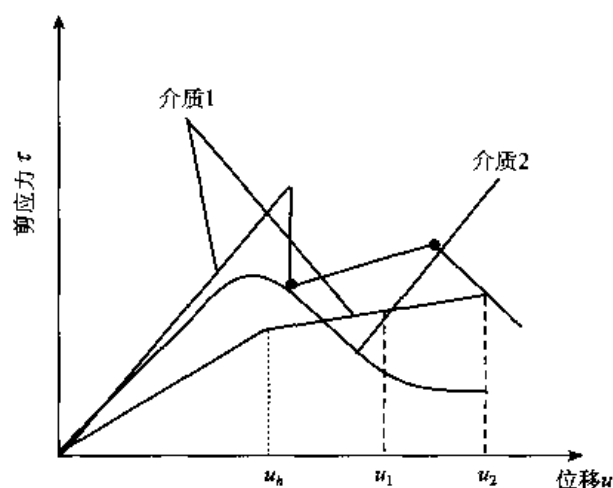


图 7-2 软弱夹层两种不同介质的本构曲线

## 二、尖点突变模型

对图 7-1 所示系统，总势能为滑面介质的应变能和滑动势能之和，为：

$$V = \begin{cases} \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^u \frac{G_1 u}{h} l_h du - Wg \sin\theta, (u \leq u_h) \\ \int_0^u \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] du + \int_0^{u_h} \frac{G_1 u}{h} l_h du + \int_{u_h}^u \left[\tau_h + \frac{G_2(u - u_h)}{h}\right] l_h du - Wg \sin\theta, (u > u_h) \end{cases} \quad (7-1)$$

式中， $l_h$  和  $l_s$  分别是应变硬化介质和应变软化介质的滑动面长度，且有  $l_s + l_h = H/\sin\beta$ 。这里假定  $l_s$  和  $l_h$  远大于  $u$ ，并在滑动过程中保持不变。如果  $l_h \gg l_s$ ，则斜坡可能是很稳定的，在下面分析中，我们只考虑  $l_h \ll l_s$  的情况。

由  $V' = 0$ ，可确定平衡曲面(图 7-3)为：

$$V' = \begin{cases} \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_1 u}{h} l_h - Wg \sin\theta = 0, (u \leq u_h) \\ \frac{G_s u}{h} l_s \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{G_2 u}{h} l_h + \left(\tau_h - \frac{G_2 u_h}{h}\right) l_h - Wg \sin\theta = 0, (u > u_h) \end{cases} \quad (7-2)$$

上式显然是力的平衡条件。根据平衡曲面的光滑性质，由  $V'' = 0$ ，求得尖点，即

$$u = u_1 = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} u_0 \quad (7-3)$$

容易知道尖点处的位移值，恰为滑面应变软化介质本构曲线拐点处的位移值。

将平衡曲面方程(7-2)相对于尖点处状态变量值  $u_1$  作 Taylor 展开，截取至 3 次项并作变量代换得到尖点突变的标准形式：

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (7-4)$$

其中：

$$x = \frac{u - u_1}{u_1} \quad (7-5)$$

$$a = \frac{6}{(m+1)^2} (k-1) \quad (7-6)$$

$$b = \frac{6}{m(m+1)^2} (mk+1-\xi) \quad (7-7)$$

$$k = \frac{G_h l_h}{m G_s l_s} \exp\left(\frac{m+1}{m}\right) \quad (7-8)$$

$$\xi = \begin{cases} \frac{Wg \sin \theta \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s u_1}, & (u_h \geq u_1) \\ \frac{\left[ Wg \sin \theta - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h \right] \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s u_1}, & (u_h < u_1) \end{cases} \quad (7-9)$$

式中,  $G_h = G_1 (u_h \geq u_1)$  或  $G_h = G_2 (u_h < u_1)$ 。参数  $k$  为滑面应变硬化(弹脆性)介质的刚度 ( $k_h = G_h l_h / h$ ), 与对应于本构曲线拐点处、应变软化介质刚度的绝对值 ( $k_s = \{m G_s l_s \exp[-(m+1)/m]\} / h$ ) 之比, 称之为刚度比; 参数  $\xi$  与岩体重量  $Wg$ 、系统的几何尺寸、介质的力学参数等有关, 称为几何-力学参数。

将式(7-6)和式(7-7)代入分岔集方程, 得到:

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 4\beta^3 (k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 (1+mk-\xi)^2 = 0 \quad (7-10)$$

式中,  $\beta = 6/(m+1)^2$ 。

如图 7-3 所示, 三维空间的坐标分别为控制参数  $a$ ,  $b$  和状态变量  $x$ 。例如, 从 B 点出发, 随着控制参数的连续变化, 系统状态沿路径 B 演化到 B', 状态变量连续变化, 不发生突变 ( $D > 0$ ); 而从 A 点出发沿路径 AA' 演化, 当接近折叠翼边缘时, 只要控制参数有微小的变化, 系统状态就会发生突变, 从折叠翼的下叶跃迁到折叠翼的上叶。这说明系统只有在跨越分岔集时, 才能发生突变, 因此, 式(7-10)即为平面滑动型斜坡突发失稳的充要力学条件判据。

由式(7-10)知, 当  $a \leq 0$ , 即  $k \leq 1$  时,  $D$  可能等于零。因此, 系统发生突变的必要条件是:  $k \leq 1$ , 即系统失稳与刚度比  $k$  有较大相关性。由式(7-8)知, 在其他参数不变的情况下,  $k$  随  $m$  的增大而减小。 $m$  值越大(刚度比越小), 即材料的均匀性或脆性程度越高, 越易引发突变。

水对斜坡失稳有重要影响。一般认为, 水的作用除化学腐蚀作用外, 主要有静水压力(浮托力)和动水压力作用。从图 7-4 可看出, 随岩石含水量的增加, 峰后曲线斜率变陡, 峰后刚度增大, 即  $m$  增大与刚度比  $k$  减小, 这将易于发生突变而滑坡。这说明水还有一种更重要的作用——增大材料均匀性(脆性)和降低刚度比作用。

### 三、两种斜坡失稳模式特征

从式(7-9)知道, 方程(7-10)蕴涵着两种不同的斜坡失稳模式, 现分述如下。

**失稳模式一:** 当应变软化介质的承载力远大于应变硬化介质时, 斜坡系统失稳将主要由应变软化介质的属性控制(图 7-5(a))。此时有  $u_h \geq u_1$ ,  $G_h = G_1$ , 由式(7-9)和式(7-10)可得到其失稳的充要力学条件表达式( $b < 0$ )为:





$$D = 4\beta^3(k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 \left[ 1 + mk - \frac{Wg\sin\theta h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s u_1} \right]^2 = 0 \quad (7-11)$$

**失稳模式二：**当系统的承载力由应变软化介质和应变硬化介质共同承担时，斜坡失稳将由两种介质的属性共同控制(图 7-5(b))。此时有  $u_h < u_1$ ， $G_h = G_2$ ，由式(7-9)和式(7-10)可得到其失稳的充要力学条件表达式( $b < 0$ )为：

$$D = 4\beta^3(k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 \left\{ 1 + mk - \frac{\left[ Wg\sin\theta - \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h \right] h \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{G_s l_s u_1} \right\}^2 = 0 \quad (7-12)$$

可看出，斜坡失稳与应力应变曲线特征密切相关，应变软化介质的峰后曲线斜率与应变硬化介质在屈服点前后的剪切模量变化特征决定着斜坡失稳的模式，这表明今后应高度重视对岩土介质全应力应变曲线特征及刚度特征的研究。

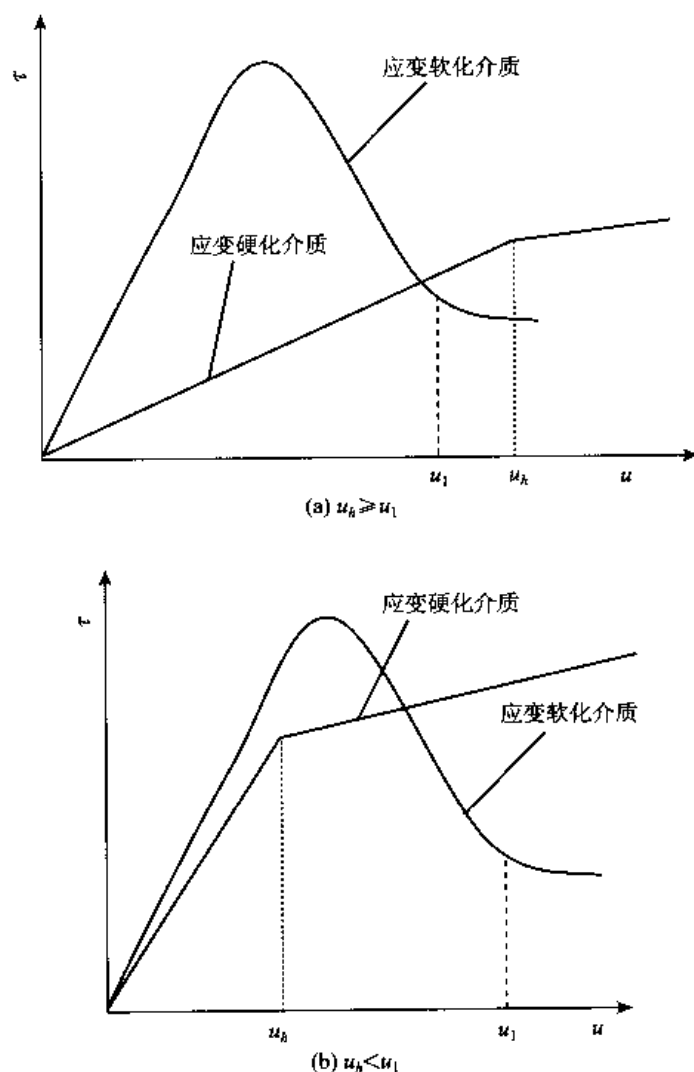


图 7-5 两种不同失稳模式  $\tau$ - $u$  曲线

从式(7-7)可知,  $\xi$  越大, 越易满足  $b < 0$  的条件导致斜坡失稳。容易证明, 在其他参数相同的情况下, 失稳模式一的条件比失稳模式二的条件更容易满足, 说明失稳模式一更易发生。

#### 四、与刚体极限平衡法的比较

由式(2-15)可确定失稳的临界位移值为:

$$u_c = u_1 \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{m+1} (1-k)^{1/2} \right], (k < 1) \quad (7-13)$$

对失稳模式一, 在某一变形  $u$  时, 按抗滑力与下滑力之比定义的安全系数为:

$$K = \frac{G_1 l_1 u \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] + G_2 l_2 u}{Wgh \sin \theta} \quad (7-14)$$

当斜坡系统演化到临界点时,  $u = u_c$ , 将式(7-13)和式(7-11)代入式(7-14), 可得到临界安全系数的表达式为:

$$K_c = \frac{\left[ 1 - \frac{\sqrt{2}(1-k)}{m+1} \right] \left\{ \exp \left( \frac{m+1}{m} \right) \exp \left[ - \left( \frac{m+1}{m} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{2}(1-k)}{m+1} \right)^m \right] + km \right\}}{1 + mk + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{m+1} (1-k)^{3/2}} \quad (7-15)$$

可看出,  $K_c$  仅与刚度比  $k$  和材料均匀性指标  $m$  有关, 即临界安全系数由系统的内部特性决定。

图 7-6 示出了不同  $m$  值时  $K_c$  随  $k$  的变化。可看出, 当  $k=1$  时, 临界安全系数是固定值 1。当  $k \neq 1$  和  $m < 3$  时,  $K_c$  随  $k$  增加而增大; 当  $k \neq 1$  和  $m \geq 3$  时,  $K_c$  随  $k$  增加而减小。这说明刚体极限平衡法只是我们提出方法的特例。虽然我们对式(7-2)作 Taylor 展开时会产生误差, 但不会大于 10% (见式(2-20))。例如当  $k=0.1$ ,  $m=1$  时,  $0.86 < K_c < 1.0$ 。这从理论上表明即使安全系数小于 1 的斜坡也可能是稳定的。

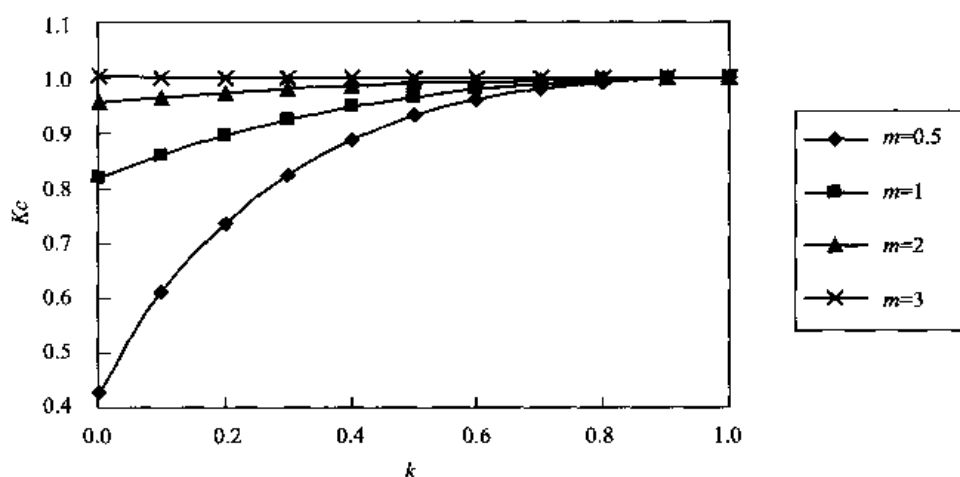


图 7-6 不同  $m$  值时  $K_c$  与  $k$  的关系

## 五、 $b$ 值变化与蠕变三阶段的对应关系

将式(7-8)和式(7-9)代入式(7-7)，得到：

$$b = \begin{cases} \frac{6\exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{m(m+1)^2 G_s l_s u_1} \left[ G_h l_h u_1 + G_s l_s u_1 \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) - Wgh\sin\theta \right], (u_h \geq u_1) \\ \frac{6\exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{m(m+1)^2 G_s l_s u_1} \left[ G_h l_h u_1 + G_s l_s u_1 \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) + \left( \tau_h - \frac{G_h u_h}{h} \right) l_h h - Wgh\sin\theta \right], (u_h < u_1) \end{cases} \quad (7-16)$$

可见， $b$  的符号与应变软化介质本构曲线拐点处下滑力与抗滑力的相对大小有关。 $b > 0$ ， $= 0$  和  $< 0$  分别对应着坡体下滑加速度  $< 0$  (减速蠕变)， $= 0$  (等速蠕变) 和  $> 0$  (加速蠕变) 的情况 (如图 7-7 所示)。

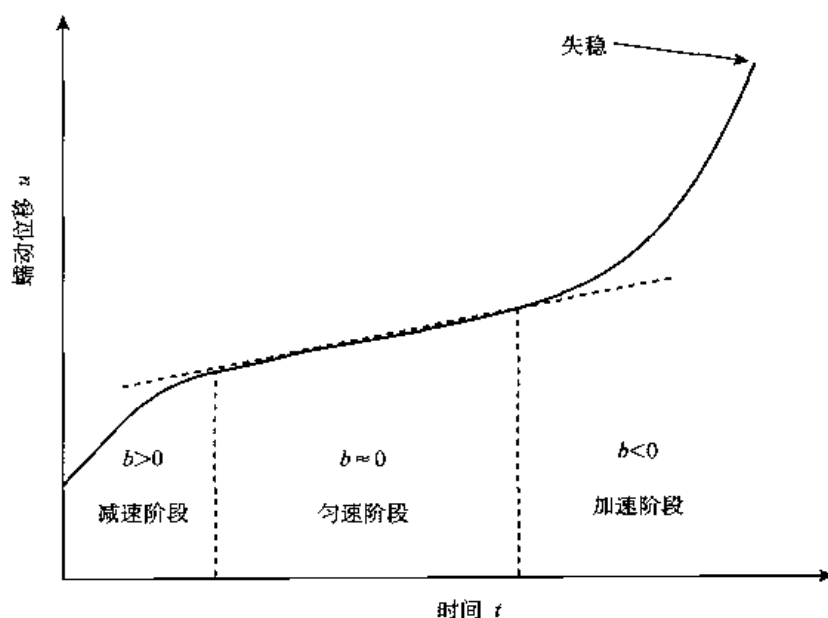


图 7-7 斜坡蠕滑变形的三阶段与  $b$  值的对应关系示意图

将平衡曲面投影到控制参数平面上，分岔集是一半立方抛物线，在  $(0, 0)$  处有一尖点。分岔集将控制参数平面分为五个分区。图 7-8 给出了各分区对应的势函数曲线，小球的位置代表系统所处的状态。

1) 在区域 E 中， $D > 0$ ，方程(7-4)只有一个实根，对应的势函数曲线只有一个最小值，系统处于稳定状态，剪切位移速率近于零，不会发生滑坡。

2) 在区域 I 中， $D < 0$ ，方程(7-4)有三个不等实根，对应的势函数曲线有两个最小值。根据  $b$  的取值可将 I 区进一步分为三个区域：在右半侧， $b > 0$ ，坡体加速度为负值，坡体做减速滑动，对应于坡体蠕变曲线 (图 7-7) 的减速蠕变阶段；在左半侧， $b < 0$ ，坡体加速度为正值，坡体做加速滑动，对应于坡体蠕变曲线的加速蠕变阶段；在 I 区中央近轴区域， $b \approx 0$ ，坡体做近匀速滑动，对应于坡体蠕变曲线的等速蠕变阶段。

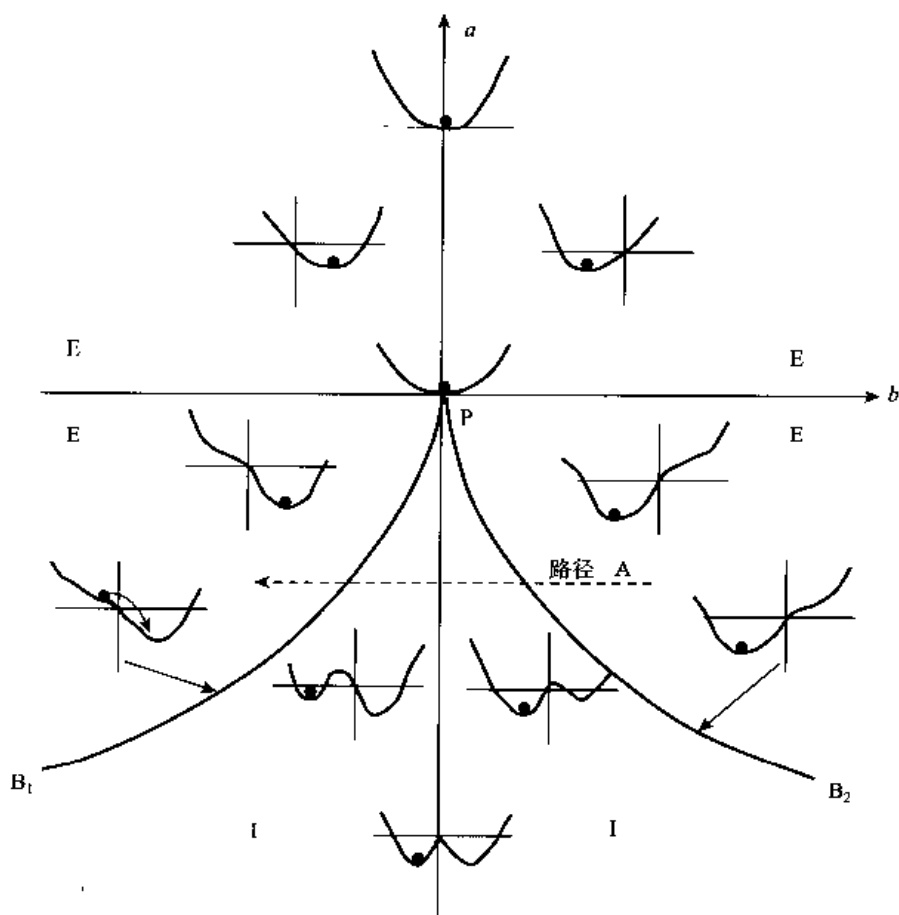


图 7-8 对于不同  $a, b$  值的势函数  $V$  (小球代表在势能曲线上坡体系统的状态)

3) 在  $B_1$  或  $B_2$  上,  $D=0$ , 方程(7-4)有三个实根, 但其中两个相等。在  $B_1$  上, 两个较小的实根相等, 在  $B_2$  上, 两个较大的实根相等, 对应的势函数有一个最小值和一个拐点。滑坡是坡体从一个不稳定平衡态(势函数曲线拐点处)跳跃到另一个稳定平衡态(势函数曲线最小值处)的过程, 出现滑坡状态变量  $x$  的突然增大, 系统沿路径 A 向左穿越  $B_1$ , 正是这样一个过程。可见路径 A 可以代表一个典型的滑坡孕育发生的完整过程: 稳定—减速滑动( $b > 0$ )—匀速滑动( $b \approx 0$ )—加速滑动( $b < 0$ )—剧滑。

4) 在 P 点上,  $D=0$ , 方程(7-4)有三个相等实根, 对应的势函数曲线只有一个最小值。系统穿越 P 点, 发生状态跳跃, 但由于前后两状态相同, 不会发生滑坡。

## 六、潘田矿区滑坡的突变性分析

潘洛铁矿下辖的潘田矿区于 1958 年开始开采。在 1990 年 8 月该区受到 30 年一遇的强台风暴雨袭击, 促使古滑坡复活, 在南、中、北段露采边坡和山体斜坡发生了不同程度的失稳, 特别是在中段上部出现了长 600 m, 宽约 400 m 呈马蹄形的大裂缝, 专家预测其潘在滑坡量约 1000 万  $m^3$ 。1997 年及 2000 年该区再度遭受强台风暴雨袭击, 使大裂缝进一步恶化, 险情进一步加剧。为保障人民群众的生命财产安全, 确保矿区安全生产, 使国家财产不受损失, 保护该区自然环境不受破坏, 从 1990 年开始, 潘洛铁矿就与南昌有色冶金设计研究院合作成立了专门的“降雨—滑坡”观(监)测预报小组, 坚持了长达 10 余年

的观测预报工作。钟铁<sup>[33]</sup>应用我们提出的斜坡失稳突变理论分析方法,对潘田矿区北矿段斜坡的稳定性进行评价,取得了良好的效果,下面对其应用成果作要介绍。

1) 以主轴线剖面(图 7-9)为例,求潜在滑动面两区段介质刚度,首先作如下假设:  
①假设潜在滑动面为一连续的平面(实际是一折面);②假设潜在滑动面上区段 F20 断层泥为应变软化介质( $E=0.26 \times 10^4$  MPa,  $\mu=0.32$ );下区段强风化粉砂岩为应变硬化介质或弹脆性介质( $E=5.8 \times 10^4$  MPa,  $\mu=0.2$ );③取地下水(主要来源于降雨下渗)对上区段断层泥的强度(刚度)降低系数为 0.70,对下区段强风化粉砂岩的强度(刚度)降低系数为 0.85。

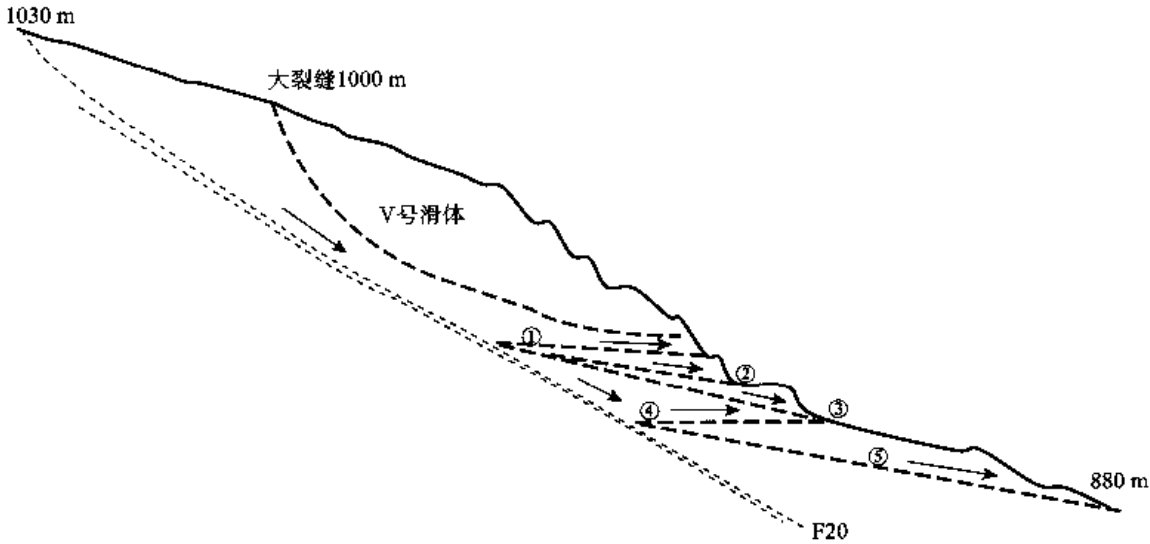


图 7-9 潘田矿区北矿段斜坡主剖面示意图

2) 计算两区段介质刚度比,计算结果如表 7-1 所示。结果表明,对任一潜在滑动面,其刚度比  $k \gg 1$ ,这意味着对北矿段而言,不满足发生快速滑坡的必要条件,10 年的实践也证明了这一点。

表 7-1 主剖面潜在滑面两区段介质刚度比  $k$

| 潜在滑动面<br>编号 | 应变软化段长度<br>(m) | 应变硬化或弹脆性段<br>长度 (m) | 刚度比<br>( $G_h \neq G_s$ ) | 刚度比<br>( $G_h = G_s$ ) |
|-------------|----------------|---------------------|---------------------------|------------------------|
| ①           | 170            | 70                  | 84.3                      | 3.69                   |
| ②           | 170            | 80                  | 96.3                      | 4.22                   |
| ③           | 205            | 115                 | 114.3                     | 5.03                   |
| ④           | 230            | 57                  | 50.7                      | 2.22                   |
| ⑤           | 230            | 150                 | 133.3                     | 5.85                   |

### 第三节 考虑蠕变特性的斜坡演化非线性动力学模型

在以上分析中,我们考虑了斜坡的准静态运动过程,但没有考虑斜坡失稳的动力学过程。下面我们将建立考虑滑面介质蠕变特性的斜坡失稳非线性动力学模型,研究其动力失稳过程。

## 一、非线性动力学模型

对滑动面介质, 如果考虑其黏滞或蠕变属性(图 7-10), 则平衡曲面方程(7-2)可表示为:

$$\left(\frac{\eta_s l_s}{h} + \frac{\eta_h l_h}{h}\right) \frac{du}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{G_s l_s \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) m(m+1)^2}{h} (x^3 + ax + b) \quad (7-17)$$

式中,  $\eta_s$  和  $\eta_h$  分别为应变软化介质和应变硬化介质的黏滞系数。上式可进一步变为:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{G_s l_s \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) m(m+1)^2}{\eta_s l_s + \eta_h l_h} (x^3 + ax + b) \quad (7-18)$$

式(7-18)是一个各参数具有明确意义的非线性动力学模型或物理预报模型, 只要根据室内实验和现场调查确定各力学与几何参数, 就能对滑坡的变形规律作出预测。

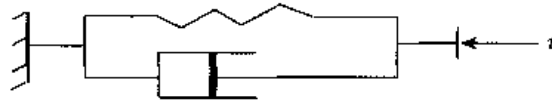


图 7-10 考虑黏滞力的剪应力模型

从以上分析知,  $a$  值表示失稳的可能性与难易程度,  $a \leq 0$  且越小时, 越易失稳; 从式(7-16)可知,  $b$  值表示应变软化介质在拐点处的剩余抗滑力, 表示坡体演化的蠕变阶段,  $b < 0$  表示在加速蠕变阶段。由式(7-18)知, 无量纲位移速率由  $a$ 、 $b$  值的变化所决定。对某一个  $x(x > 0)$  值,  $a(a < 0)$  和  $b(b < 0)$  值越小, 即系统越接近失稳点, 位移速率越大。

现在, 我们研究式(7-18)在平衡态的性质, 令  $dx/dt = 0$ , 可知式(7-18)也是一个尖点突变, 其失稳的充要条件也是  $D = 4a^3 + 27b^2 = 0$ 。

从式(7-18)可看出, 无量纲的滑动位移  $x$  由系统本身的力学参数与几何参数决定。如几何参数不变, 系统力学参数的变化将反映在  $(x, t)$  关系曲线上, 所以, 滑坡观测时间序列曲线蕴含了力学参数变化的信息, 有可能根据位移观测序列反演斜坡的力学参数。

## 二、非线性动力学模型的反演

如果我们有观测时序数据, 即知道方程(7-18)的一系列特解, 那么可根据观测数据反演其非线性动力学模型并进行预测, 其预测步骤如下:

(1) 因为实测的序列为  $(u, t)$ , 所以必须把  $(x, t)$  序列转换为  $(u, t)$  序列。

把式(7-5)代入式(7-18), 得到:

$$\frac{du}{dt} = c_1 u^3 + c_2 u^2 + c_3 u + c_4 \quad (7-19)$$

式中,

$$c = -\frac{G_s l_s \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) m(m+1)^2}{6(\eta_s l_s + \eta_h l_h)} \quad (7-20)$$

$$c_1 = c/u_1^2 \quad (7-21)$$

$$c_2 = -3c/u_1 \quad (7-22)$$

$$c_3 = (3+a)c \quad (7-23)$$

$$c_4 = [b - (a+1)]cu_1 \quad (7-24)$$

(2) 对方程(7-19)求解

根据观测序列, 可对方程(7-19)求解反演算出各常数值, 这说明我们有可能根据( $u$ ,  $t$ )时序观测数据反演力学参数。值得注意的是, 用通常的最小二乘法解方程(7-19), 其解常常是不稳定的, 可用我们在第四章提出的改进 Backus 广义线性反演理论求解。求解后, 可算出  $a$ ,  $b$  值, 进行预测。再根据  $D$  值的变化判断斜坡的稳定性。

### 三、实例分析

1991 年 6 月 29 日凌晨, 湖北省秭归县鸡鸣寺发生了滑坡, 体积 60 万  $m^3$ 。由于滑坡预报及时准确, 避免了重大的人员伤亡和财产损失。

鸡鸣寺滑坡<sup>[34]</sup>为人类活动诱发的岩质顺层滑坡, 滑坡体岩性为坚硬的石灰岩夹软弱泥质灰岩组成, 岩层倾角基本与坡角一致, 约为  $35^\circ$ 。坡顶高程 1296 m, 坡脚处采石场堆石平台面高程 250 m, 其中坡脚高程 300 ~ 310 m 以下岩层被水泥厂开采(图 7-11)。滑动面为软弱泥灰岩夹层, 在长期采石爆破震动和降雨的条件下, 坡体开始变形。1990 年 3 月 5 日, 在采石场上方发现了多条裂缝, 从 1990 年 4 月 24 日开始观测裂缝宽度的变化。图 7-12 示出了 C4 观测点位移随时间的变化, 其变形曲线类似于典型的蠕变三阶段曲线。

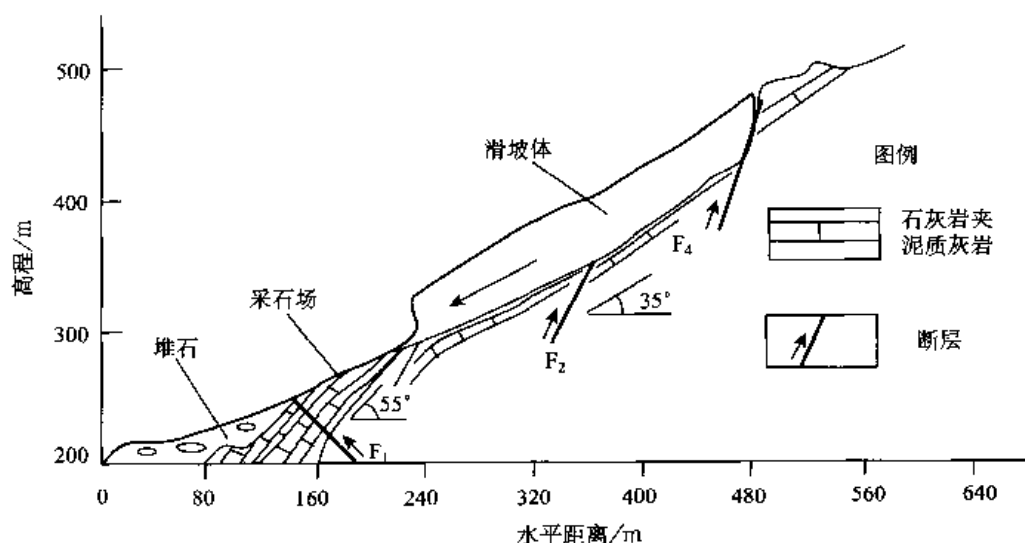


图 7-11 鸡鸣寺滑坡剖面图

根据 90.4 ~ 91.6 之间的观测数据, 反演出该滑坡的非线性动力学模型如下:

$$\frac{dx}{dt} = -0.5161(x^3 - 1.03701x - 0.4282) \quad (7-25)$$

预测出的位移值如图 7-12 所示, 可看出预测效果比较理想。分别取起始点到某个计算点的数据逐次反演, 可算出一系列( $a$ ,  $b$ ,  $D$ )值。从图 7-12 发现,  $|D|$  值在等速蠕变阶段



呈现比较稳定的变化, 变幅( $|\Delta D| \leq 3.27$ )很小; 在加速蠕变阶段开始后,  $|D|$  值陡增 (增幅  $\Delta D$  分别为: 71.48, 286.42, 9326) 而出现一峰值点, 之后迅速降低, 在临近失稳时, 接近于零。我们可以根据这一特殊现象, 判断滑坡的发生。

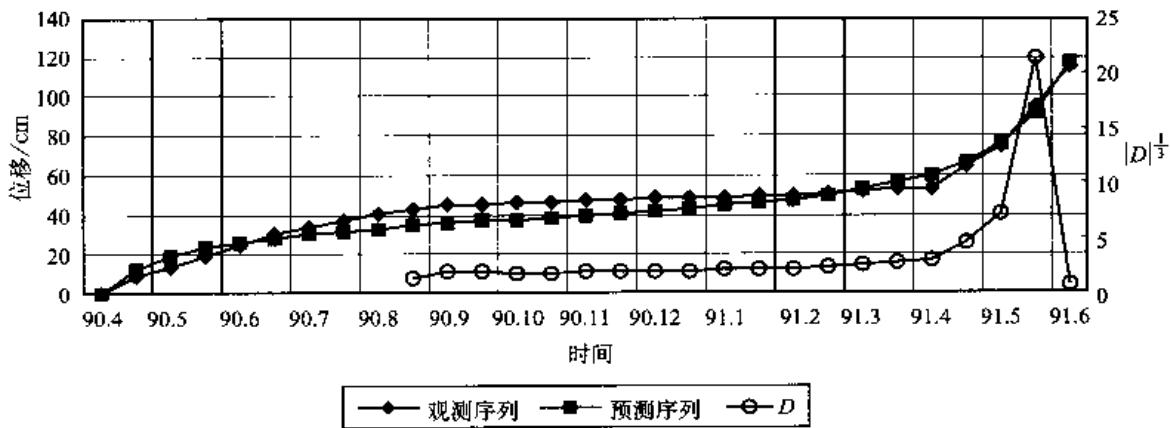


图 7-12 鸡鸣寺滑坡 C4 测点位移和  $|D|$  值随时间的变化

根据反演出的  $a$  和  $b$  值, 可估算  $m$ 、 $k$  和  $\xi$  的合理取值范围。图 7-13 给出了  $k$  和  $\xi$  随  $m$  值的变化。可看出,  $k$  的合理值范围为  $0 \leq k \leq 0.8272$ ,  $\xi$  的合理值范围为  $1 \leq \xi \leq 1.61$ ,  $m$  的合理值范围为  $0 < m \leq 1.4$ 。若考虑最不利的情况, 即无锁固段 (弹脆性介质) 的情况 ( $l_h = 0$ ,  $k = 0$ ,  $m = 1.4$ ,  $\xi = 1.582$ ), 并已知  $l_s = 237.6$  m,  $u_1 = 0.928$  m,  $W_g = 641520$  kN,  $h = 0.2$  m,  $\theta = 35^\circ$ , 则得到  $G_s = 1.17$  MPa,  $\eta_s = 7.128 \times 10^{10}$  Pa·s。可见, 滑坡发生前, 剪切模量参数非常低。

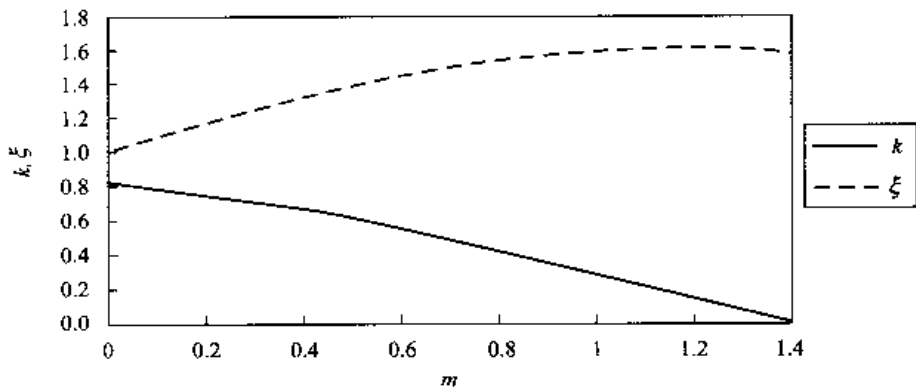


图 7-13  $k$  和  $\xi$  随  $m$  值的变化

#### 第四节 简化的物理预报模型

如果斜坡系统演化进入了稳定蠕变阶段, 此时有  $b \approx 0$ , 则式(7-18)可简化为:

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda_1 x - \lambda_2 x^3) = \lambda_2 (\lambda x - x^3) \tag{7-26}$$

式中,  $\lambda_1 = ca$ ,  $\lambda_2 = -c > 0$ ,  $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ 。式(7-26)是我们提出的简化物理预报模型。在斜坡处于稳定状态时,  $\lambda_1 < 0 (\lambda < 0)$ ; 不稳定状态时,  $\lambda_1 \geq 0 (\lambda \geq 0)$ 。

## 一、分岔

在式(7-26)中,  $\lambda$  是一控制性参数。根据 Lyapunov<sup>[35]</sup> 线性稳定性分析理论, 容易得到两组静态解的稳定性如下:

$$\begin{cases} \lambda < 0, x_0 = 0, \omega = \lambda_2 \lambda < 0, x_0 \text{ 渐近稳定} \\ \lambda > 0, \begin{cases} x_0 = 0, \omega = \lambda_2 \lambda > 0, x_0 \text{ 不稳定} \\ x_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda}, \omega = -2\lambda_2 \lambda < 0, x_{\pm} \text{ 渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \quad (7-27)$$

式中,  $\omega$  为方程(7-26)的特征值。由此可以看出, 对同一定态解  $x_0 = 0$ , 由于  $\lambda$  从负变为正时, 在  $\lambda = 0$  处由渐近稳定变为不稳定, 并且产生出两支渐近稳定的新解, 而且新分岔解按  $\sqrt{\lambda}$  的方式增长。这表明该系统发生了分岔现象,  $\lambda = 0 (k = 1)$  是分岔点(图 7-14)。这表明按线性稳定性分析得出的结论与突变分析得出的结论一致, 因为当  $\lambda$  从负变为正时, 相应  $a$  值从  $k > 1$  经过  $k = 1$  变为  $k < 1$ , 系统将从不可能失稳状态向可能失稳状态转移。

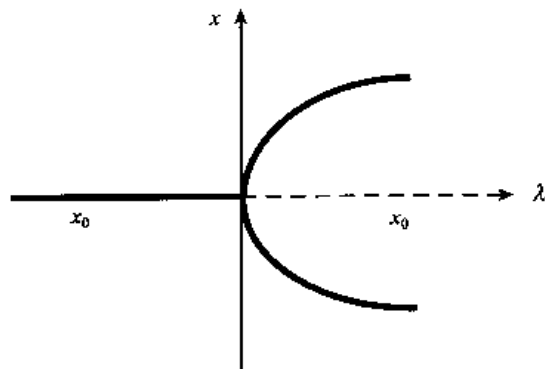


图 7-14 系统稳定性及分岔

粗实线——渐近稳定定态解; 粗虚线——不稳定定态解

## 二、混沌

如果我们隔一固定时间间隔  $\Delta t$  测量  $x$  值一次, 用  $x_n$  表示第  $n$  次的  $x$  值, 则原来的连续变量  $x(t)$  和  $t$  就变为离散变量  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  和  $(n = 0, 1, 2, \dots)$ , 连续的微分方程(7-26)就变为如下离散的差分方程:

$$x_{n+1} = (1 + \lambda_2 \lambda) x_n \left( 1 - \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2 \lambda} x_n^2 \right) \quad (7-28)$$

令  $\alpha = 1 + \lambda_2 \lambda$ ,  $y_n = [\lambda_2 / (1 + \lambda_2 \lambda)]^{1/2} x_n$ , 得到:

$$y_{n+1} = \alpha y_n (1 - y_n^2) \quad (7-29)$$

式中,  $n = 1, 2, \dots$ 。

对式(7-29)进行迭代发现(图 7-15), 当  $\alpha \leq 2$  时, 系统出现周期 1 解; 当  $\alpha$  增大, 在  $\alpha = 2.01, 2.24, 2.289, 2.299$ , 依此出现周期 2、4、8、16 解; 当  $\alpha > 2.3$  时, 出现周期

2<sup>∞</sup>解。这说明随着 $\alpha$ 的增大,系统演化由周期运动向混沌运动过渡,其通向混沌之路是通过倍周期分岔实现的。

把式(7-20)和(7-6)代入 $\alpha$ 的表达式,得到:

$$\lambda_1 = ca = \frac{G_s l_s}{(\eta_s l_s + \eta_k l_k)} (1 - k) m \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) > 1.3 \quad (7-30)$$

可以根据上式判明斜坡运动是否具有混沌特征。

在应用式(7-30)时,应注意 $\eta_s$ 和 $\eta_k$ 的单位(一般是Pa·s)应当与 $\Delta t$ 的时间单位一致。上式的物理意义是:当 $a < 0$  ( $k < 1$ ),即系统有可能失稳时,斜坡演化才可能出现混沌,而对不可能失稳的斜坡,不会出现混沌,这说明混沌也是斜坡失稳可能性的标志。其理由是:对不可能失稳的斜坡,外界环境因素(降雨、爆破、地震等)对其影响很小;反之对可能失稳的斜坡,环境因素对其影响较大,斜坡演化表现出对环境因素的敏感性,系统运动可能呈现出无周期性,即出现混沌。从上式还可看出,混沌能否出现取决于滑面介质参数与两段不同介质的刚度比 $k$ ,由斜坡系统内在的物理力学性质所决定。如果斜坡系统不具有混沌特征,可进行确定性的预报;反之,预报必有可预报时间尺度的限制。显然, $m$ 越大, $k$ 越小,系统越易出现混沌。

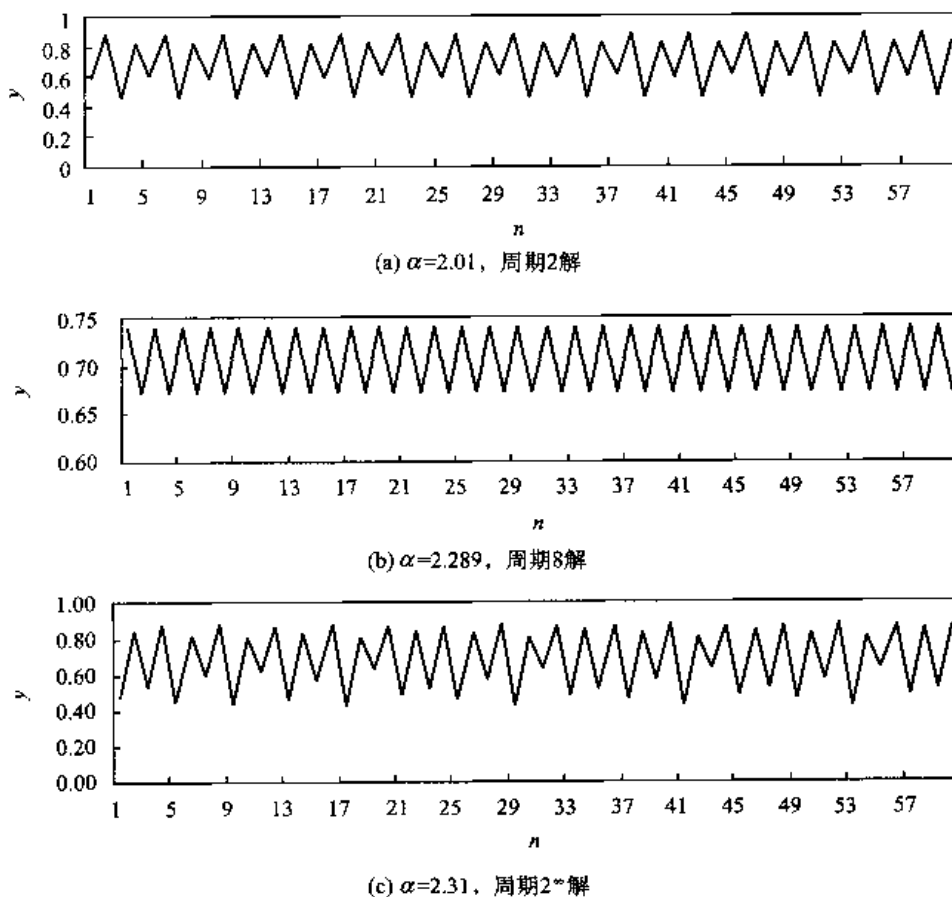


图 7-15 取得稳定解时,  $(y, n)$  随  $\alpha$  值的变化

### 三、预报模型

显然式(7-26)只适用于斜坡变形的等速蠕变阶段,用  $u$  表示时,式(7-26)可进一步变为:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 \left( \frac{u - u_1}{u_1} \right) - \lambda_2 \left( \frac{u - u_1}{u_1} \right)^3 \quad (7-31)$$

上式类似于 Logistic 方程,是我们给出的一个简化物理预报模型。该模型与我们在第三章得出的序参量方程较为类似。这说明尽管所用的非线性方法不同,但都是殊途同归,最终结果一致。

根据滑坡观测时序数据进行预报时,可对式(7-31)进行最小二乘法拟合求出参数  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , 根据最大位移

$$u_{\max} = u_1 \left( 1 + \sqrt{\frac{\lambda_1}{3\lambda_2}} \right) \quad (7-32)$$

对应的时间估测滑坡发生时间。根据鸡鸣寺等速蠕变阶段的数据算得  $u_{\max} = 72.2 \text{ cm}$ , 估算失稳时间为 1991 年 4 月 26 日。 $\lambda_1 = 0.171 < 1.3$ , 表明该滑坡无混沌现象,可进行确定性预报。

## 第五节 考虑滑动加速度及环境影响的斜坡演化非线性动力学模型

### 一、双尖点突变模型

在本章第四节的分析中,我们建立了考虑滑面介质蠕变特性的斜坡演化非线性动力学模型,但没有考虑滑动加速度及外界环境因素对斜坡演化过程的影响。本节将建立一个更全面的非线性动力学模型来研究这些问题。

由方程(7-17)可导出斜坡失稳的非平衡合力  $F$  为:

$$F = W \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[ \left( \frac{\eta_s l_s}{h} + \frac{\eta_h l_h}{h} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{6} \frac{G_s l_s u_1 \exp \left( - \frac{m+1}{m} \right) m(m+1)^2}{h} (x^3 + ax + b) \right] \quad (7-33)$$

当考虑环境因素,例如四季气候、温度、降雨、地震或振动等的变化对斜坡演化过程的影响,并且把外部环境输入系统的周期信号近似取为  $A \cos \omega t$ , 则式(7-33)可进一步变为:

$$W \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{\eta_s l_s}{h} + \frac{\eta_h l_h}{h} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{6} \frac{G_s l_s u_1 \exp \left( - \frac{m+1}{m} \right) m(m+1)^2}{h} (x^3 + ax + b) = A \cos \omega t \quad (7-34)$$

式中,  $A$  与  $\omega$  分别是周期信号的振幅与频率。把  $u$  化为  $x$  的表达式,则式(7-34)可重写为:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \alpha x^3 + \gamma x + \beta_c = p \cos \omega t \quad (7-35)$$

式中,  $\mu = \frac{\eta_i l_i + \eta_h l_h}{Wh}$ ,  $r = \frac{1}{6} \frac{G_i l_i \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) m (m+1)^2}{Wh}$ ,  $\alpha = r$ ,  $\gamma = ra$ ,  $\beta_c = rb$ ,  $p = \frac{A}{Wu_1}$ 。

考虑到常数项  $\beta_c$  对非线性方程(7-35)的演化行为影响较小, 为重点研究失稳的本质问题, 可忽略常数项。令  $\omega_0^2 = \gamma (a > 0)$ , 则方程(7-35)可进一步简化为:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \alpha x^3 + \omega_0^2 x = p \cos \omega t \quad (7-36)$$

式中,  $\alpha$  表示在降雨或地震影响下系统的非线性力学属性, 方程(7-36)与 Duffing 方程类似<sup>[36]</sup>。

因为外部荷载  $p \cos \omega t$  是按简谐变化的, 故方程(7-36)的解可设为以下形式<sup>[36]</sup>:

$$x = Z \cos(\omega t + \phi) \quad (7-37)$$

式中,  $Z$  是振幅;  $\phi$  是初相。

将式(7-37)代入式(7-36), 并略去 3 次谐波项, 根据  $\cos \omega t$  和  $\sin \omega t$  前的系数必为零的条件, 得到:

$$Z^2 \left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \alpha Z^2 \right)^2 + Z^2 \mu^2 \omega^2 = p^2 \quad (7-38)$$

消去方程(7-38)中关于  $Z^2$  的二次项, 得到:

$$(B + Q)^3 + (B + Q)\mu_d + v_d = 0 \quad (7-39)$$

式中,

$$B = Z^2 \quad (7-40)$$

$$\rho = \omega_0^2 - \omega^2 \quad (7-41)$$

$$Q = 8\rho/9\alpha \quad (7-42)$$

$$\mu_d = 16(3\mu^2 \omega^2 - \rho^2)/27\alpha^2 \quad (7-43)$$

$$v_d = -16[8\rho(\rho^2 + 9\mu^2 \omega^2) + 81\alpha p^2]/729\alpha^3 \quad (7-44)$$

式中,  $B + Q$  是状态变量;  $\mu_d$  与  $v_d$  是控制参数。方程(7-39)<sup>[20]</sup>是双尖点突变的标准平衡曲面方程(如图 7-16 所示), 因为状态变量本身由变量  $B$  和  $Q$  组成。两个尖点的位置可由  $\mu_d = 0$  与  $v_d = 0$  求出。令  $f = \omega^2 - \omega_0^2 = -\rho$ , 可得:

$$f_{1,2} = 3\mu \left( \frac{\mu}{2} \pm 2 \sqrt{\frac{9}{4} \mu^2 + 3\omega_0^2} \right) \quad (7-45)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{32f_{1,2}^2}{81p^2} \quad (7-46)$$

即图 7-16 中两个尖点的坐标分别为  $O_1(f_1, \alpha_1)$  和  $O_2(f_2, \alpha_2)$ 。

$f$  实际上为外部环境输入信号的振动频率  $\omega$  与系统自振频率  $\omega_0$  的平方差, 这里简称为频率差。图 7-16 表示在地震或其他环境因素影响下结构振动的振幅  $Z$  与频率差  $f$  以及表示系统力学性能的非线性系数  $\alpha$  三者之间的变化关系。下面分析  $\alpha$  的不同取值对动力学稳定性的影响。

1) 当  $\alpha$  为小量, 可忽略不计时, 即振动系统的非线性特性很微弱时, 振动系统主要表现为线性振子的特性, 由式(7-38)得:

$$Z = \frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2}} \quad (7-47)$$

式(7-47)说明当外部环境信号的振动频率 $\omega$ 与系统的自振频率 $\omega_0$ 接近时,结构振动的振幅会突然增大,出现所谓的共振效应(对应于图7-16中的路径AA')。

2) 当 $\alpha < \alpha_2$ 时,振幅出现极大值的位置,不出现在 $\omega \rightarrow \omega_0$ 的位置,而是出现在 $\omega < \omega_0$ 的某一频率范围(对应于图7-16中的路径BB')。

3) 当 $\alpha > \alpha_1$ 时,最大振幅值的位置出现在 $\omega > \omega_0$ 的频率范围(对应于图7-16中的路径CC')。

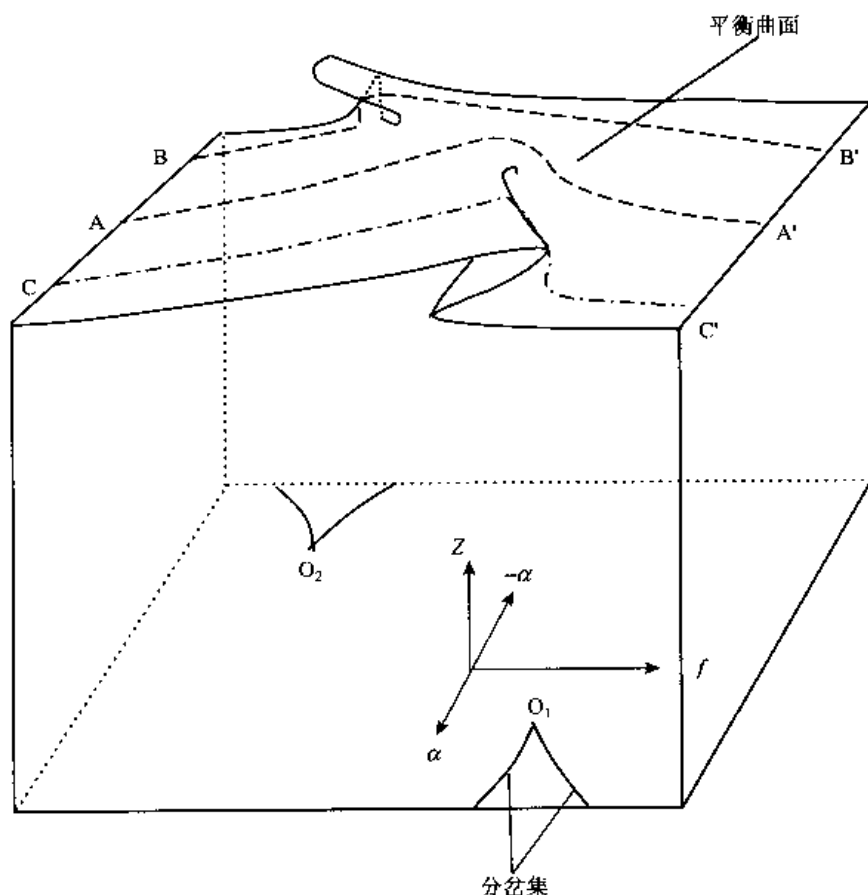


图7-16 双尖点突变模型

由以上分析可知,当 $\alpha$ 不为零时,即考虑系统的非线性特性时,外部环境因素对斜坡稳定性的影响比较复杂。也就是说,滑坡发生时间不一定正好发生在降雨或地震期间,已有很多的滑坡实例可以证实这一点。这也意味着试图建立降雨数据与滑坡发生的统计关系非常困难,甚至是徒劳无益的。

## 二、非线性动力学模型产生的混沌效应

混沌系统的基本特点之一是“对初始条件的极度敏感性”,即初始条件的微小变化可以导致系统的巨大响应,这种响应有着明显的不确定性。通过对方程(7-35)的研究,发现斜坡在演化过程中有混沌现象出现。

假定在方程(7-35)中,除外部环境输入信号振幅 $p$ 是可变参数外,其他参数是常数。为简化分析,令 $\mu=0.3$ , $\alpha=1$ , $\gamma=-1$ , $\beta_c=0$ , $\omega=1.2$ ,则方程(7-35)变为:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} + x^3 - x = p\cos 1.2t \quad (7-48)$$

当 $p$ 由小逐渐变大时,上述方程的解如图7-17所示。当 $p<0.3$ 时,解 $x(t)$ 都是周期振荡,并且周期逐次成倍增长。当 $p=0.2$ 时,振荡周期 $\tau$ 等于外部环境信号的周期 $T$ ,即 $\tau=T=2\pi/1.2$ ;当 $p=0.27$ 时, $\tau=2T$ ;当 $p=0.28$ 时, $\tau=2^2T$ ;当 $p=0.2867$ 时, $\tau=2^3T$ ;  $p$ 继续增大且达到某一临界值 $p_*$  ( $p_*\approx 0.3$ )时, $\tau=2^\infty$ ,即周期变为无穷大,系统不再具有周期性,意味着混沌出现。这表明当外部环境输入信号幅度逐渐增强时,斜坡演化过程会出现混沌现象,其通向混沌之路是通过倍周期分岔(振荡)实现的。

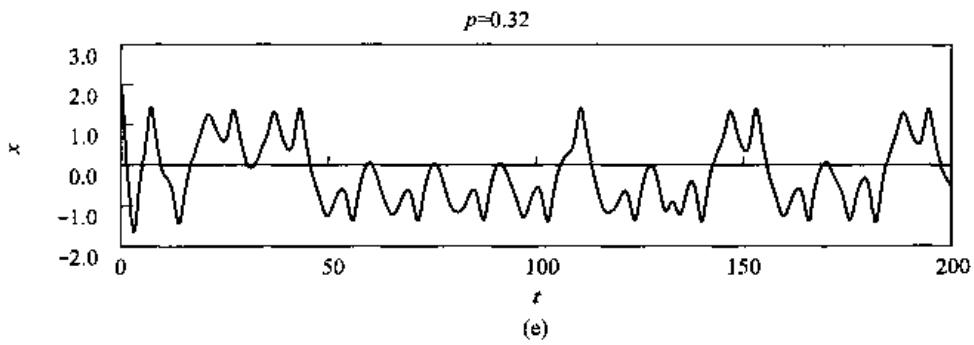
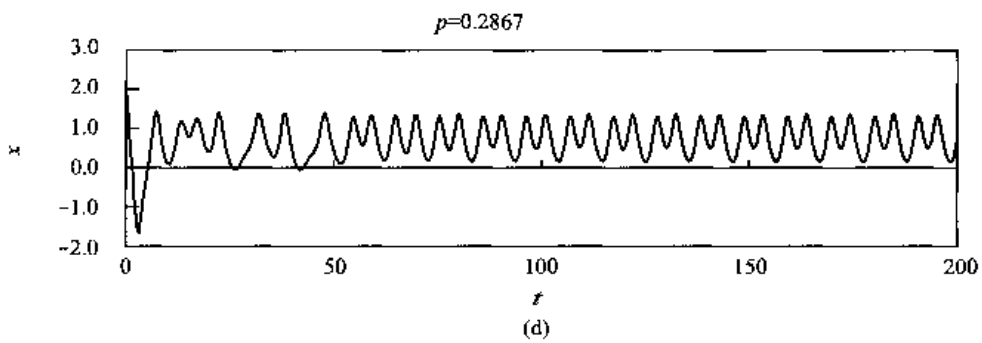
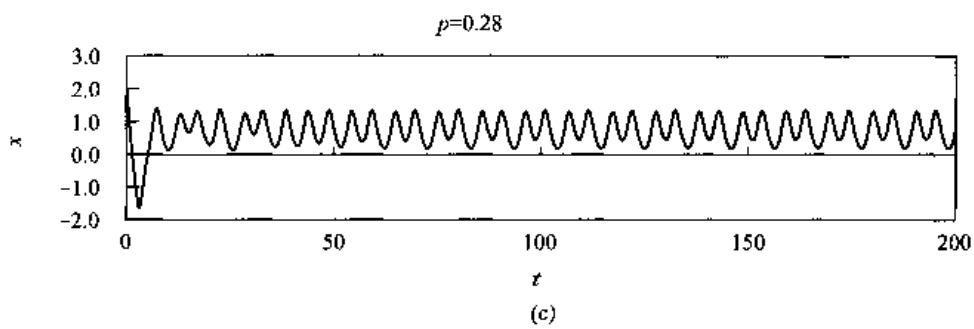
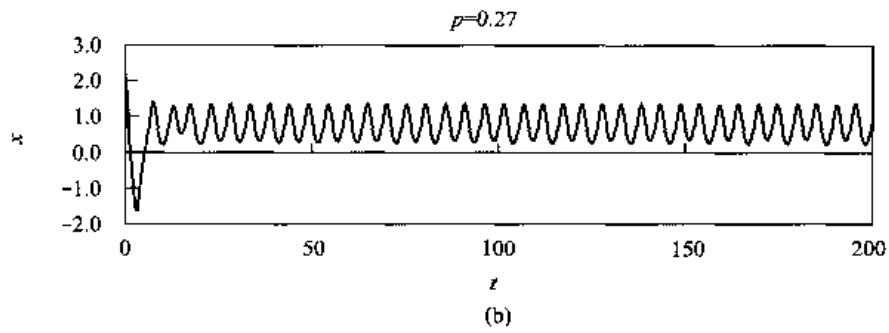
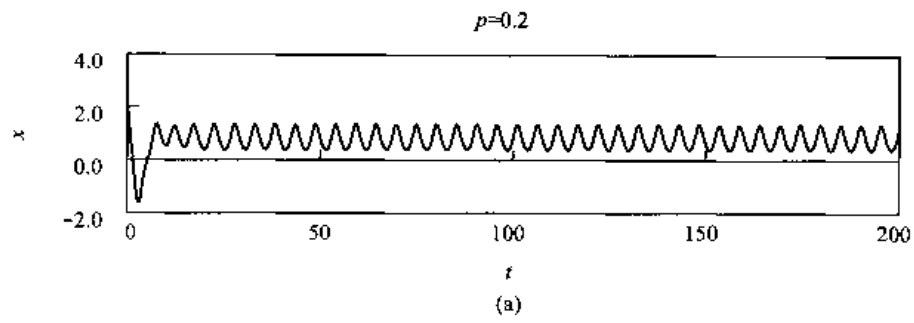
当 $p$ 的取值在混沌范围内,如图7-17(e)和图7-17(g)之间的图7-17(f),还存在很窄的周期“窗口”,图7-17(f)的周期为 $5T$ 。从混沌区继续加大 $p$ 值,又可能依次出现周期为 $2^nT$ 的周期振荡( $n=\dots, 2, 1, 0$ ),如图7-17(h)和7-17(i)所示的 $2T$ 和 $1T$ 的周期振荡。这说明,在外界环境因素影响下,斜坡演化过程有时具有周期特征,有时具有混沌特征,或两者交替进行,显示出斜坡演化过程复杂性的本质属性。斜坡演化过程具有周期特征时,是完全可以预测的,具有混沌特征时,虽然可以预测,但必有预测时间尺度限制。

这种倍周期振荡并由此通向混沌的情况也可由相平面( $x, \dot{x}$ )上的轨线看出。图7-18是与图7-17(a)~(e)相对应的相平面上的轨线(去掉了暂态过程)。可以看出,周期运动都是闭曲线,周期为 $2^nT$ 的周期振荡有 $n$ 条近似相同走向的轨线,这些轨线共有 $n$ 个交点。至于混沌运动(图7-18(e)),其轨线看上去确实是杂乱无序的。然而,这并不意味着是混沌运动完全无序而没有一定结构,实际上它是有内部结构的,我们建议采用下述方法分析这样的复杂运动。

受迫振荡可以看成是两个运动系统的耦合,其中之一是Duffing方程:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} + x^3 - x = 0 \quad (7-49)$$

所表征的非线性子系统;另一个是外部环境因素引起的外加周期力,它可以看作是一线性简谐振荡子系统。容易知道方程(7-49)有3个奇点<sup>[37]</sup>(定态):①鞍点: $x_1=0$ , $x_2=0$ ;②稳定焦点: $x_1=1$ , $x_2=0$ ;③稳定焦点: $x_1=-1$ , $x_2=0$ 。当外加周期力的振幅 $p$ 较小时,线性子系统的振荡很弱,并且它对非线性子系统的作用也很弱,整个系统的运动围绕着非线性子系统的两稳定焦点之一以线性振子的频率( $\omega=1.2$ , $\tau=T$ )振荡(图7-18(a))。稍许加大 $p$ ,非线性子系统的影响是使整个系统围绕稳定焦点的振荡出现分频(倍周期)(图7-18(b))。当 $p$ 进一步增大且超过非线性子系统三奇点之间的间隔时,系统可在这些奇点之间来回跳跃振荡(图7-18(e)),运动更加复杂化,导致混沌出现。当 $p$ 再进一步加大,线性振子完全处于支配地位,非线性子系统的作用相对来说很弱,这时整个系统便按线性子系统方式运动,即它被锁定在外加周期力的频率上( $\tau=T$ )。总之,两耦合子系统之一起支配作用时,整个系统处于倍周期分岔状态;只有当两个子系统的相互作用能力匹配时,两振荡相互强烈影响,运动才复杂化出现混沌。以上说明,当斜坡系统本身的非线性作用与外界环境输入信号的线性周期力响应能力相当时,才能出现混沌现象。





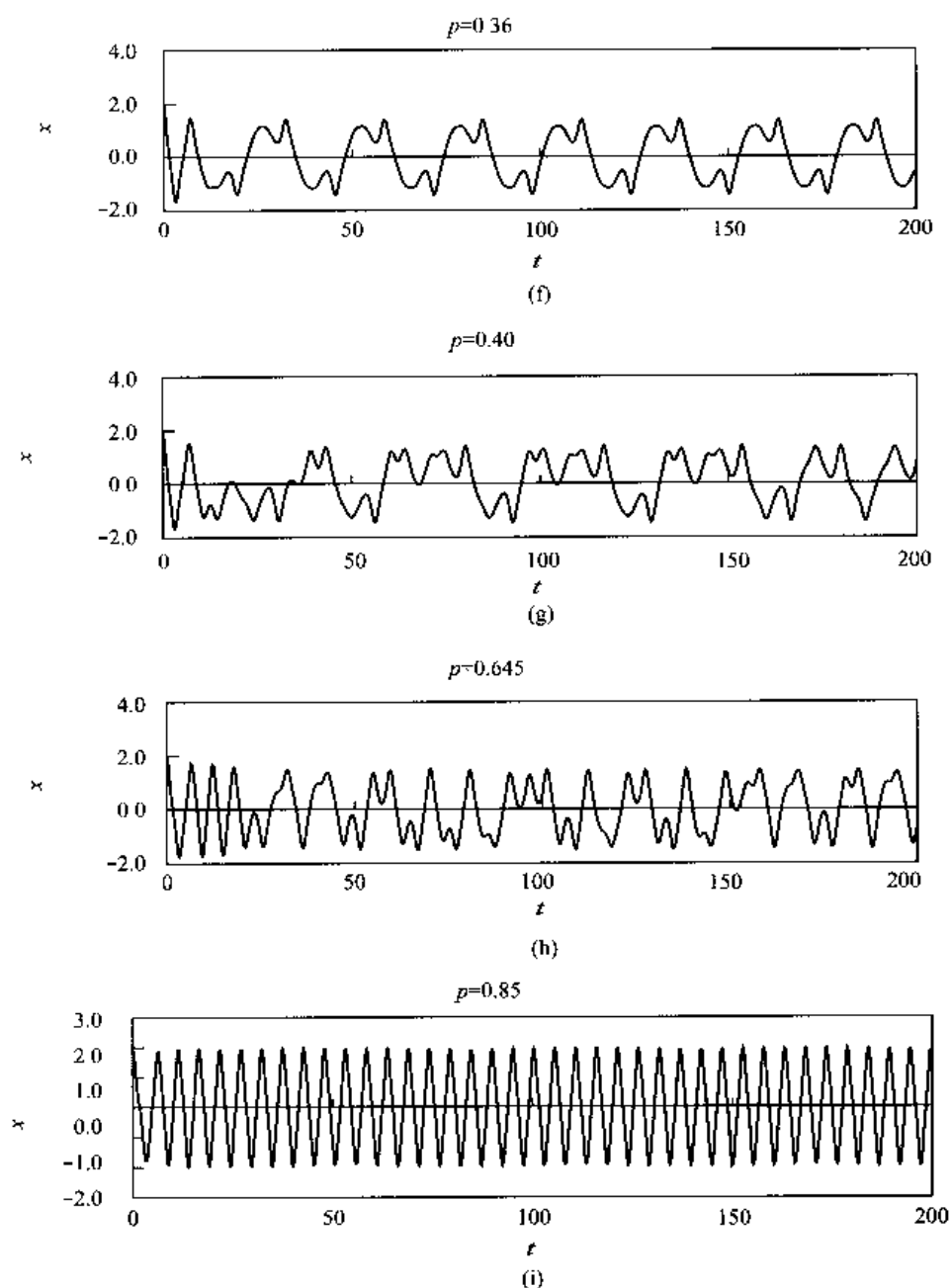


图 7-17  $p$  取不同值时的  $x-t$  曲线  
( $p=0.20、0.27、0.28、0.2867、0.32、0.36、0.40、0.645、0.85$ )

由于我国地质结构复杂，大多数斜坡本身的非线性作用较强。相对而言，由于我国北方气候比较恶劣，即环境的周期性变化大，北方斜坡的演化更具有混沌性；南方气候变化较小，南方地区的斜坡演化则表现出较弱的混沌性。

## 第六节 结 论

1) 考虑平面滑动斜坡滑面介质的不同力学属性，用突变理论建立了一个尖点突变模

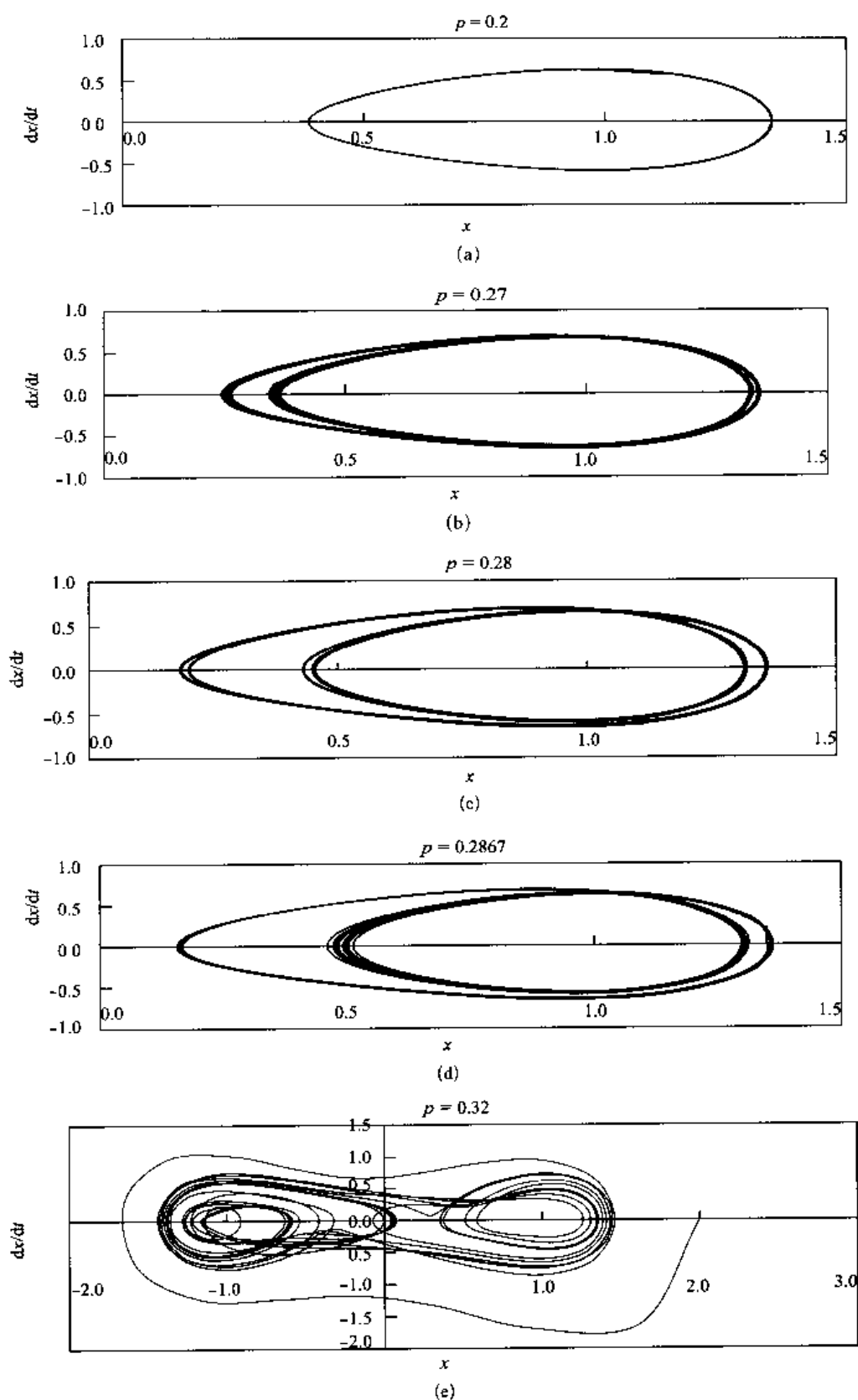


图 7-18  $p$  取不同值时  $(x, \dot{x})$  在相平面上的轨线  
( $p = 0.20, 0.27, 0.28, 0.2867, 0.32$ )

型。研究发现,斜坡失稳主要取决于应变硬化(弹脆性)介质的刚度,与应变软化介质在本构曲线拐点处的刚度之比 $k$ 以及材料的均匀性或脆性指标 $m$ 值,并给出了失稳的充要条件力学判据。研究还发现了水的一种新作用机制——增加材料均匀性(脆性)和降低刚度比的作用。

2) 考虑滑面介质的黏性或蠕变作用,给出了一个斜坡演化的非线性动力学模型(物理预报模型),可以根据试验确定的力学参数及现场调查给出的几何参数进行滑坡预报。

3) 对鸡鸣寺滑坡根据观测序列进行了动力学模型的反演分析,发现 $|D|$ 值在等速蠕变阶段呈现较为稳定的变化,变幅很小;在加速蠕变阶段开始迅速增大,出现一峰值点,而后迅速降低,在临近失稳时,接近于零。我们可以根据这一特殊现象判断滑坡的发生。 $|D|$ 值可作为判别斜坡稳定性的重要指标。

4) 根据滑坡观测序列,可反演其非线性动力学模型,我们给出了反演步骤和方法。滑坡观测序列蕴涵着丰富的力学参数信息,可根据观测序列反算其力学参数。以上对鸡鸣寺滑坡进行了参数反分析,结果有待进一步验证。

5) 考虑斜坡演化在等速蠕变阶段的特点,给出了一个简化物理预报模型。研究了其分岔和混沌特征。发现分岔点( $k=1$ )是斜坡系统由稳定到不稳定的转折点,混沌由滑面介质的力学参数所决定,并给出了判别混沌的准则,发现只有斜坡可能失稳时才有可能出现混沌。

6) 考虑滑动加速度与环境因素的影响,提出了一个更全面地描述斜坡演化过程的非线性动力学模型。发现外部环境因素与斜坡系统响应的关系是复杂非线性的,解释了滑坡发生时间可能与最大降雨或地震不同步的本质原因。

7) 当斜坡系统本身的非线性作用与外界环境因素的响应能力相当时,才能出现混沌现象,通向混沌之路是通过倍周期分岔实现的。

## 参 考 文 献

- [1] Skempton A W. Residual strength of clays in landslides, folded strata and the laboratory [J]. *Geotechnique*, 35: 3 ~ 18. 1985.
- [2] Lan L. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis [J]. *Can. Geotech. J.*, 30: 905 ~ 919. 1993.
- [3] 秦四清,张倬元,王士天,黄润秋. 非线性工程地质学导引[M]. 成都:西南交通大学出版社,1993.
- [4] Chau K T. Landslides modeled as bifurcations of creeping slope with nonlinear friction law [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 32(23): 3451 ~ 3464. 1995.
- [5] Chau K T. Applications of catastrophe and bifurcation theories to slope failures[A]. *Slope Engineering in Hong Kong, HK-IE, Geotechnical Division Annual Seminar (1996. 7 Session)* [C], Rotterdam: Balkema. 129 ~ 136. 1998.
- [6] Chau K T. Onset of natural terrain landslides modeled by linear stability analysis of creeping slopes with a two state variable friction law [J]. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23(15): 1835 ~ 1855. 1999.
- [7] Claes A. Application of probabilistic approach in slope stability analyses [A]. *Landslides* [C]. Rotterdam: Balkema, 1137 ~ 1142. 1996.
- [8] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slope [J]. *J. Geotech. Eng'g.*, 122(7): 577 ~ 596. 1996.
- [9] Saito M. Forecasting time of slope failure by tertiary creep [A]. *Proc. Seventh Int. Conf. On soil mech. and found. Eng'g.*

- [C], Montreal, 667 ~ 683. 1969.
- [10] Saito M and Yamada G. Forecasting and result in case of landslide at Takabayama [A]. Proc. 8th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng'g. [C], Mexico, 667 ~ 683. 1978.
- [11] Fukuzono T. A new method for predicting the failure time of a slope [A]. Proc. IV International conference and field workshop on landslide [C], Tokyo. 1985.
- [12] Fukuzono T. Recent studies on time prediction of slope failure [J]. Landslide news, (4): 9 ~ 12. 1990.
- [13] Voight B. Materials science law applies to time forecasts of slope failure [J]. Landslide news, (3): 8 ~ 11. 1989.
- [14] Rat M. Difficulties in foreseeing failure in landslides-La Clapière [A], French Alps. Proceed. 5<sup>th</sup> ISI. [C], Lausanne, Vol. 3, 1503 ~ 1505. 1988.
- [15] Bhandari R K, Senanayake K S and Thayalan. N. Pitfalls in the prediction on landslide through rainfall data [A]: Bell, In Landslides [C]. Rotterdam: Balkema, 887 ~ 890. 1991.
- [16] Sousa J and Voight B. Computational flow modeling for long runout landslide hazard assessment with an example from Clapiere landslide, France [J]. Bulletin of the IAEG, (2): 131 ~ 150. 1992.
- [17] Wang S J. Spatial and time prediction on mass movement of rock slope [A]. Proc. of 27<sup>th</sup> ICG [C], Moscow, 667 ~ 677. 1984.
- [18] 晏同珍. 滑坡动态规律与预测应用 [A]. 全国第三次工程地质大会论文选集 [C]. 成都: 成都科技大学出版社, 1988.
- [19] 黄润秋, 许强. 斜坡失稳时间的协同预测模型 [J]. 山地研究, 1997, 15(1): 7 ~ 12.
- [20] Thom R. Stabilité structurelle et morphogénèse [M]. New York: Benjamin. 1972.
- [21] Henley S. Catastrophe theory models in geology [J]. Mathematical Geology, 8(6): 649 ~ 655. 1976.
- [22] Saunders P T. An introduction to catastrophe theory [M]. London: Cambridge University Press. 1980.
- [23] Keilis-Borok V I. The lithosphere of the earth as a nonlinear system with implications for earthquake prediction [J]. Rev. Geophys., 28: 19 ~ 34. 1990.
- [24] Phillips J D. Instability and chaos in hillslope evolution [J]. Am. J. Sci., 293: 25 ~ 48. 1993.
- [25] Phillips J. Nonlinear dynamics and the evolution of relief [J]. Geomorphology, (14): 57 ~ 64. 1995.
- [26] Phillips J D. Nonlinear dynamical systems in geomorphology: revolution or evolution? [J]. Geomorphology, 5: 219 ~ 229. 1992.
- [27] Sijing Qin, Jiu Jimmy Jiao, Sijing Wang. A cusp catastrophe model of instability of slip-buckling slope [J], Rock Mechanics and Rock Engineering, Vol. 34(2): 119 ~ 134. 2001.
- [28] Sijing Qin, Jiu Jimmy Jiao, Sijing Wang. A Nonlinear Catastrophe Model of Instability of Planar-slip Slope and Chaotic Dynamical Mechanisms of Its Evolutionary Process [J], International Journal of Solids and Structures, Vol. 38: 8093 ~ 8109. 2001.
- [29] Tang C A. Catastrophe in Rock Unstable Failure (in Chinese) [M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House. 1993.
- [30] Tang C A, Hudson J A, Xu X. Rock Failure Instability and Related Aspects of Earthquake Mechanisms (in Chinese) [C]. Beijing: China Coal Industry Publishing House. 1993.
- [31] Sijing Qin, Sijing Wang, Jiu Jimmy Jiao. The predictable time scale of landslide [J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 59: 307 ~ 312. 2001.
- [32] Jaeger J C, Cook N G W. Fundamentals of rock mechanics (third edition) [M]. London: Chapman and Hall. 1979.
- [33] 钟铁, 潘田. 矿区降雨-滑坡关系的突变性分析. 金属矿山, 2001, (5): 16 ~ 18.
- [34] 吕贵芳. 鸡鸣寺滑坡的形成及监测预报 [J]. 中国地质灾害防治学报, 1994, Vol. 5, 增刊, 376 ~ 383.
- [35] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, and Vastano J A. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica, 16D: 285 ~ 317. 1985.
- [36] Holmes P J, Rand D A. The bifurcations of Duffing's equation: an application of catastrophe theory. Journal of sound and vibration 44: 237 ~ 253. 1976.
- [37] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础. 长春: 东北师范大学出版社, 1995.

# 第八章 重力坝坝基岩体滑动失稳的突变模型

## 第一节 引言

具有缓倾角软弱结构面的混凝土重力坝坝基岩体深层抗滑稳定问题,是水利水电建设工程中的重要课题,已引起了工程界、学术界的普遍关注<sup>[1~15]</sup>。传统的刚体极限平衡法作为稳定性评价的主要方法,具有概念明确、计算简便及应用经验较丰富等优点,用它近似地得出坝基岩体滑动失稳的整体安全度<sup>[1~8]</sup>。吴彰敦<sup>[9]</sup>采用改进的极限平衡法分析坝基深层抗滑稳定性;有些学者<sup>[1,10~12]</sup>采用有限元、边界元等数值方法研究有软弱夹层的坝基深层抗滑稳定问题;周创兵等<sup>[12]</sup>用弹性理论分析反倾角结构面的坝基深层滑动问题;钱保国等<sup>[13]</sup>利用蒙特卡罗方法研究深层滑动稳定性的可靠度;张发明等<sup>[14]</sup>基于塑性力学的上限定理,建立了坝基三维深层抗滑稳定性极限分析法;何显松、张永、张林等<sup>[15]</sup>采用模拟试验法研究坝基三维深层抗滑稳定问题。

坝基软弱结构面包括破裂不连续结构面、破碎结构面、层状结构面及泥化结构面<sup>[1]</sup>,大量的研究和实例<sup>[1,16]</sup>表明,由于成因、充填情况、平整度和光滑度、孔隙水压力,以及应力状态等因素不同,软弱面可能由不同力学属性的介质组成,如弹脆性(岩桥)、应变硬化与应变软化属性等。如前所述,即使对同一介质其力学属性也可能完全不同。刚体极限平衡分析方法要么把坝基软弱结构面作为具有同一力学属性的同一介质来考虑,要么认为具有不同力学属性的结构面介质同时达到峰值强度,这与实际情况不符。因此,需要发展新的抗滑稳定性分析方法。

本章应用突变理论方法,研究了重力坝沿软弱结构面滑动的失稳模型与突变机制。软弱结构面内含岩桥,岩桥介质具有复杂的弹脆性属性,软弱结构面内除岩桥外的介质具有应变软化属性。当具有不同力学属性的介质相互作用时,系统演化将表现出强烈的非线性行为,其失稳模式与失稳判据与过去的认识有很大不同。

## 第二节 坝基沿软弱结构面滑动的力学模型

由于坝体混凝土与下伏岩体一般结合较好,当坝基底部存在缓倾角软弱结构面时,大坝的失稳常表现为沿下部软弱结构面滑动的深层滑移失稳。根据结构面的产状可分为两种型式,分别为向下游倾斜和向上游倾斜的缓倾角软弱结构面所构成的单滑动面滑动(如图8-1)。图8-1中, $P_w$ 为作用在软弱结构面上水的扬压力; $H_w$ 为大坝上下游库水作用在坝体及坝基岩体上水平方向水压力的合力; $W$ 为坝体加上软弱面以上岩块的总重量。

由于所处环境与地质条件的不同,在坝基软弱结构面不同部位,介质的力学性质存在

着种种差异。为简化分析，我们视软弱面介质由两种介质组成，即介质1具有复杂的弹脆性属性(如岩桥与岩块)，沿滑面长度为 $l_1$ ，其破坏与剪切行为见第二章第二节描述；介质2具有应变软化特性(如良好胶结物、风化破碎带、断层破碎带)，沿滑面长度为 $l_2$ ，两种介质的本构模型曲线如图8-2所示。

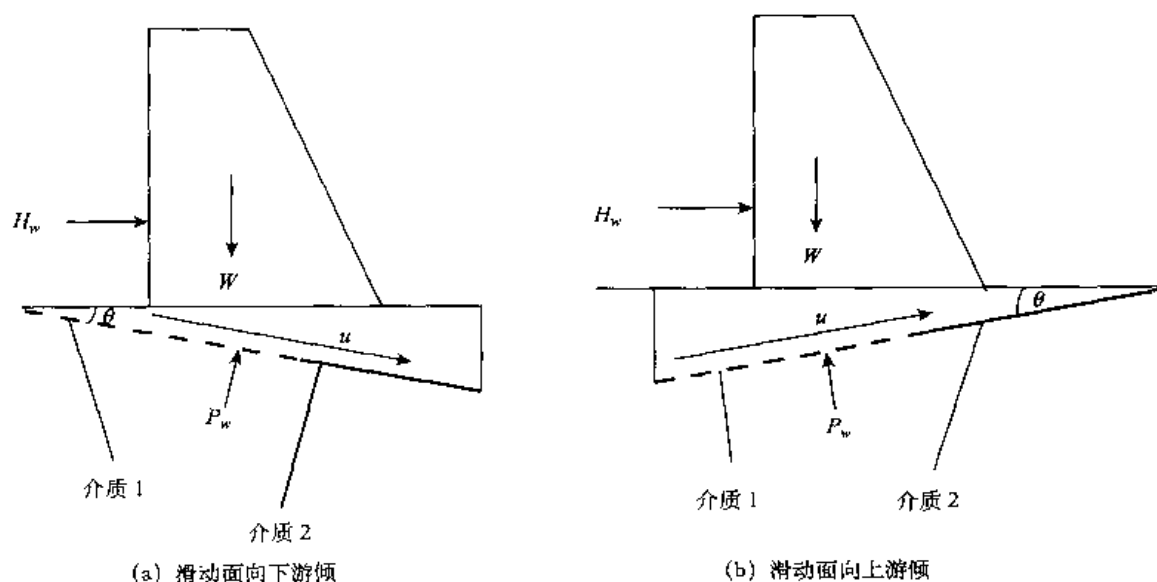


图8-1 坝基岩体沿软弱结构面滑动力学模型

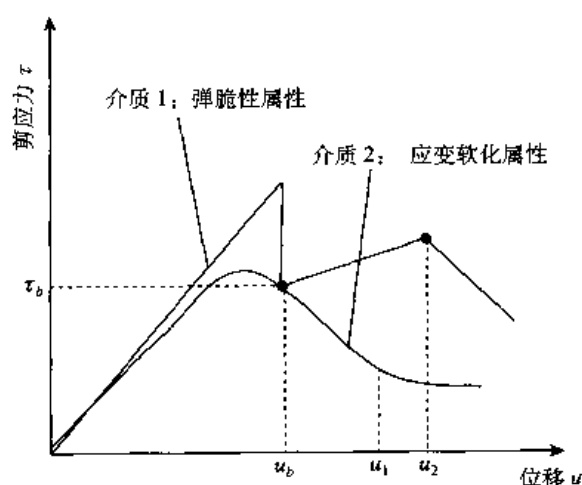


图8-2 软弱夹层两种不同介质的本构曲线

具有应变软化属性介质的本构模型采用式(2-1)；具有弹脆性属性介质的本构模型采用如下表达式：

$$\tau_e = \begin{cases} G_{e1} \frac{u}{h} & (u < u_b) \\ \tau_b + G_{e2} \frac{u - u_b}{h} & (u_b \leq u < u_2) \end{cases} \quad (8-1)$$

式中,  $u_b$  和  $\tau_b$  分别为对应于岩块被剪断时的临界位移和剩余抗剪强度;  $u_2$  是当不规则的结构面被磨平时的位移;  $G_{e1}$  和  $G_{e2}$  分别是对应于  $u < u_b$  和  $u_b \leq u < u_2$  的剪切模量。

### 第三节 坝基沿结构面滑动失稳的尖点突变模型

对图 8-1 所示系统, 沿平行结构面方向建立力的平衡条件, 可得:

$$F = \frac{G_1 l_1}{h} u \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] + \frac{G_{e1} l_e}{h} u - (H_w \cos \theta \pm W \sin \theta) = 0 \quad (u < u_b) \quad (8-2)$$

或

$$F = \frac{G_1 l_1}{h} u \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] + \frac{G_{e2} l_e}{h} u + \left( \tau_b - \frac{G_{e2} u_b}{h} \right) l_e - (H_w \cos \theta \pm W \sin \theta) = 0 \quad (u_b \leq u < u_2) \quad (8-3)$$

式中,  $h$  为软弱结构面的厚度; “ $\pm$ ”号对应图 8-1 中(a)、(b)两种情况取值, 当软弱结构面倾向下游时, 取“+”号; 当倾向上游时, 取“-”号。假定  $l_e$  和  $l_1$  远大于  $u$  并在滑动过程中保持不变。

如果岩桥不破坏, 则坝基岩体不能沿软弱结构面发生整体滑动失稳。因此, 坝基滑动失稳必发生在  $u_b \leq u < u_2$  区间。在以下分析中, 我们仅对式(8-3)进行讨论。

式(8-3)显然是力的平衡条件, 在突变理论分析中称为平衡曲面<sup>[17]</sup>。根据平衡曲面的光滑性质, 由  $F'' = 0$ , 可求得尖点, 即:

$$u_1 = u = \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{1}{m}} u_0 \quad (8-4)$$

容易知道尖点处位移值, 恰为滑动面应变软化介质本构曲线拐点处的位移值。

将平衡曲面方程(8-3)相对于尖点处状态变量值  $u_1$  作 Taylor 展开, 截取至 3 次项并作变量代换得到尖点突变<sup>[17]</sup>的标准形式:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (8-5)$$

其中,

$$x = \frac{u - u_1}{u_1} \quad (8-6)$$

$$a = \frac{6}{(m+1)^2} (k-1) \quad (8-7)$$

$$b = \frac{6}{m(m+1)^2} (mk+1-\xi) \quad (8-8)$$

$$k = \frac{G_e l_e}{m G_1 l_1} \exp \left( \frac{m+1}{m} \right) \quad (8-9)$$

$$\xi = \frac{\left[ H_w \cos \theta \pm W \sin \theta - \left( \tau_b - \frac{G_e u_b}{h} \right) l_e \right] h \exp \left( \frac{m+1}{m} \right)}{G_1 l_1 u_1}, \quad (u_b < u_1) \quad (8-10)$$

式中,  $G_e = G_{e2}$ 。  $k$  为滑动面弹脆性介质在岩桥破坏后的等效剪切刚度 ( $k_e = G_e l_e / h$ ), 与对应于本构曲线拐点处、应变软化介质的等效剪切刚度的绝对值 ( $k_s = \{m G_1 l_1 \exp[-(m+1)/m]\} / h$ ) 之比, 称之为刚度比; 参数  $\xi$  与总重量  $W$ 、库水水平推力  $H_w$ 、软弱面倾向、系统

几何尺寸、介质力学参数等有关,称为几何-力学参数。

将式(8-7)和(8-8)代入分岔集方程,得到:

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 4\beta^3(k-1)^3 + 27\left(\frac{\beta}{m}\right)^2(1+mk-\xi)^2 = 0 \quad (8-11)$$

式中,  $\beta$  为参数, 且有  $\beta = 6/(m+1)^2$ 。

如前所述, 方程(8-11) ( $b < 0$ ) 是坝基滑动失稳的充分必要条件; 其失稳的必要条件之一是满足  $k \leq 1$ , 即系统失稳与刚度比  $k$  有较大相关性。由式(8-9)知, 在其他参数不变的情况下,  $k$  随  $m$  的增大而减小。 $m$  值越大(刚度比越小), 即材料的均匀性或脆性程度越高, 越易引发突变。

## 第四节 库水位涨落及工程处理措施对滑动失稳的影响

### 一、库水位涨落的影响

一般认为, 库水的作用主要有静水压力和动水压力作用。随着水库水位的升高, 库水作用在坝体上的推力  $H_w$  增大, 导致合力  $H_w \cos \theta \pm W \sin \theta$  增大, 相应  $\xi$  值增大。由式(8-8)知, 随  $\xi$  值增大  $b$  值将不断减小, 由  $b > 0$  逐渐变为  $b < 0$ , 使得滑动失稳易于发生。

由失稳判据式(8-11)可知, 库水位达到峰值时并不一定会发生突变失稳, 因为此时  $D$  值可能小于 0; 而随着库水位的回落, 参数  $k$ 、 $\xi$ 、 $m$  会不断发生变化,  $D$  值可能从  $D < 0$  演化至  $D = 0$ , 系统演化跨越分岔集方程左支, 即由缓慢蠕变滑动演化成灾难性的突变滑动失稳。这说明坝基滑动突变失稳的发生相对于库水位的峰值变化, 可能具有一定的滞后性<sup>[9]</sup>。其具体滞后时间长短, 与其几何条件、力学参数、环境条件等因素及其变化有关。

### 二、工程处理措施的影响

对于有缓倾角软弱结构面的坝基, 为了提高其安全性能, 需进行处理, 一般采用坝基固结灌浆处理、锚固、混凝土抗剪桩(平硐)或是挖去部分软弱面物质并换填混凝土等措施。过去认为, 这些措施的实施可提高坝基软弱面上的抗滑能力。我们通过研究认为, 除此之外, 这些措施还有一种新的工程效应。

固结灌浆、混凝土抗剪桩(平硐)和坝基部分混凝土换填处理增大了介质 1 的长度  $l_1$  和其等效剪切模量  $G_1$ , 根据式(8-9)易见, 刚度比  $k$  显然增大。而帷幕灌浆措施除有上面的作用外, 还降低了坝基软弱结构面的孔隙水压力。

锚固措施除能提高强度外, 还能降低应变软化属性介质的峰后刚度(如图 8-3 所示), 同样达到了提高刚度比的目的。

可见, 这些工程措施的实施使系统刚度比  $k$  增大, 系统不易于满足失稳发生的必要条件  $k \leq 1$ ; 当这些工程措施实施足够多和完善时, 刚度比  $k$  可能会大于 1, 坝基就不会发生沿软弱结构面的突变急速滑动的灾难性失稳。



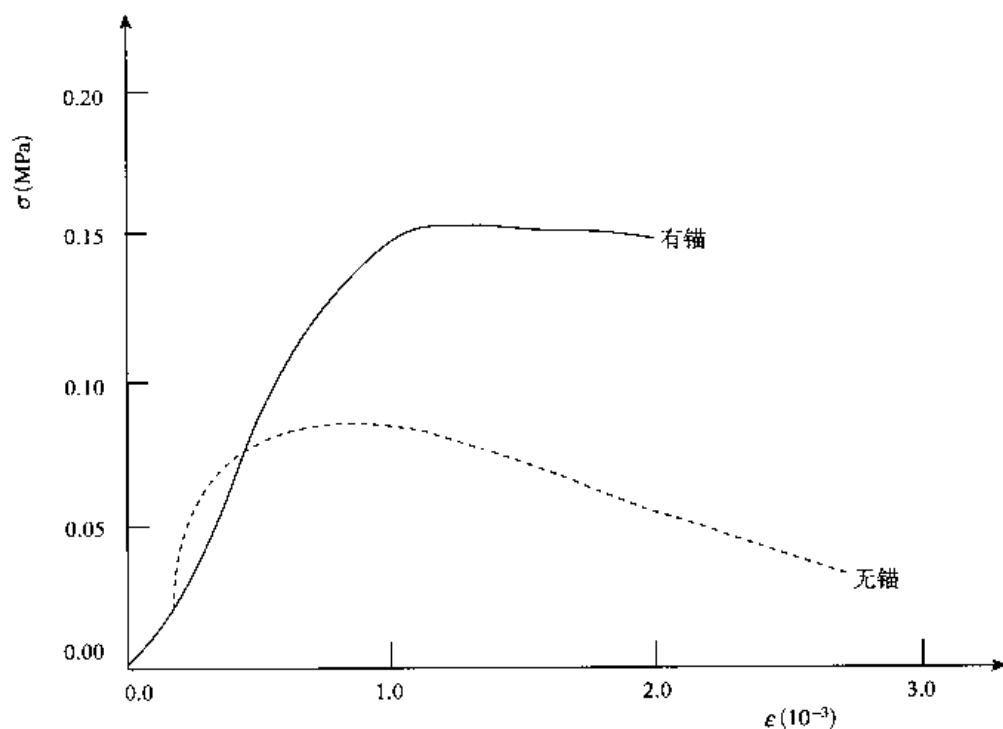


图 8-3 劈裂法对比试验<sup>[18]</sup>

## 参 考 文 献

- [1] 王恩敏. 坝基岩体工程地质力学分析[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [2] 张光斗, 王光论. 水工建筑物(上册)[M]. 北京: 水利电力出版社, 1992.
- [3] 中华人民共和国水利电力部. 混凝土重力坝设计规范(试行)(SDJ21-87)及补充规定[A]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.
- [4] 水利电力部科学研究所, 中国科学院地质研究所. 水利水电工程地质[M]. 北京: 科学出版社, 1974.
- [5] 李仲春. 论万家寨坝基夹层抗滑稳定性地质评价[J]. 水利水电工程设计, 2001, Vol. 20, No. 1.
- [6] 赖国伟等. 具有软弱结构面坝基的抗滑稳定分析[J]. 武汉水利电力学院学报, 1987, No. 4.
- [7] 李瓚, 龙云霄. 重力坝、拱坝基础岩体抗滑稳定性分析中一些问题的探讨[J]. 水利学报, 2000, No. 8.
- [8] Azm S Al-Homoud, Najat Tanash. Modeling uncertainty in stability analysis for design of embankment dams on difficult foundations [J]. Engineering Geology, Vol. 71; 323 ~ 342, 2004.
- [9] 吴彰敦. 坝基深层抗滑极限平衡分析的改进[J]. 红水河, 1992, Vol. 11, No. 2.
- [10] 常晓林, 陆述远. 重力坝均质坝基失稳机理研究[J]. 1989, Vol. 22, No. 1.
- [11] Jian-Hai Zhang, Jiang-Da He, Jing-Wei Fan. Static and dynamic stability assessment of slopes or dam foundations using a rigid body-spring element method [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, Vol. 38, 1081 ~ 1090, 2001.
- [12] 周创兵, 陈益峰. 含反倾角结构面的坝基深层滑动模式研究. 岩石力学与工程学报[J], 2003, Vol. 22, No. 8.
- [13] 钱保国, 吴彰敦. 坝基深层抗滑稳定可靠度分析蒙特卡罗力法[J]. 红水河, 2000, Vol. 19, No. 4.
- [14] 张发明, 陈祖煜, 张宏亮. 坝基三维深层抗滑稳定性分析的极限方法[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2003, Vol. 22, No. 6.
- [15] 何显松, 张水, 张林等. 重力坝坝基稳定三维地质力学模型试验研究[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2002, Vol. 34, No. 2.
- [16] 竹良, 刘汉超, 石豫川, 谢勇谋. 某电站坝基软弱夹层分布的趋势面分析[J]. 地质灾害与环境保护, 2003, Vol. 14,

No. 2.

- [17] Thom R. Stabilité structurelle et morphogénèse[M]. New York: Benjamin. 1972.
- [18] 朱维申,何满朝. 复杂条件下围岩稳定性与岩体动态施工力学. 北京:科学出版社,1995.
- [19] 钱海涛,秦四清,马平. 重力坝坝基沿软弱结构面滑动失稳的非线性机制[J]. 工程地质学报,2006, Vol. 14, No. 3, 307 ~ 313.

## 第四篇 岩体几何失稳与几何-物理失稳非线性分析方法

在外力作用下,由于介质几何形状变化产生的弯曲破坏现象,称为几何失稳,如顺层斜坡滑移-弯曲失稳、岩体倾倒破坏等;几何-物理失稳是几何失稳与物理失稳现象的组合,如在地下采矿中常遇到的坚硬顶板与煤柱系统的失稳。

### 第九章 滑移-弯曲斜坡与层状岩体几何失稳力学模型

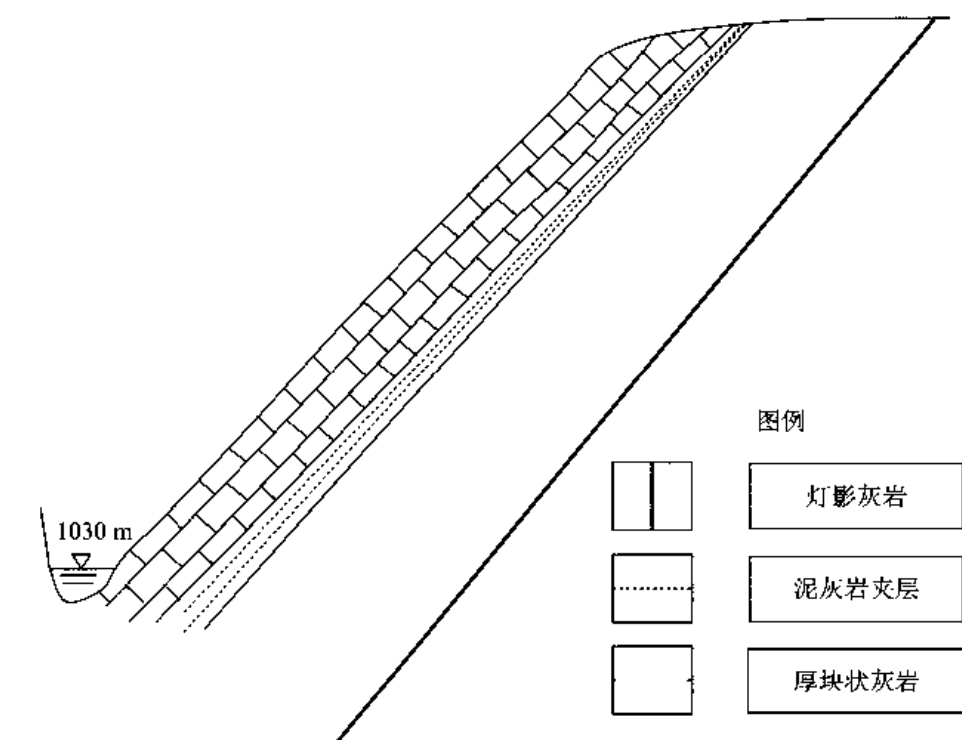
#### 第一节 引言

岩体常被一套结构面切割成层状或板状结构。当坡面平行于结构面时,在岩板自重和孔隙水压力作用下,坡脚附近的岩板逐渐弯曲,上部岩板滑移。在中国西南山区,发生了许多滑移-弯曲滑坡,如长江鸡扒子滑坡和雅砻江霸王山滑坡。典型实例之一是距雅砻江二滩水电站上游5 km的霸王山滑坡<sup>[1]</sup>(图9-1),在长期的岩板自重作用下,接近坡脚的岩板逐渐弯曲,上部岩板沿着泥灰岩软弱夹层滑移,在弯曲与滑移相互作用下,最终导致了滑坡的发生。

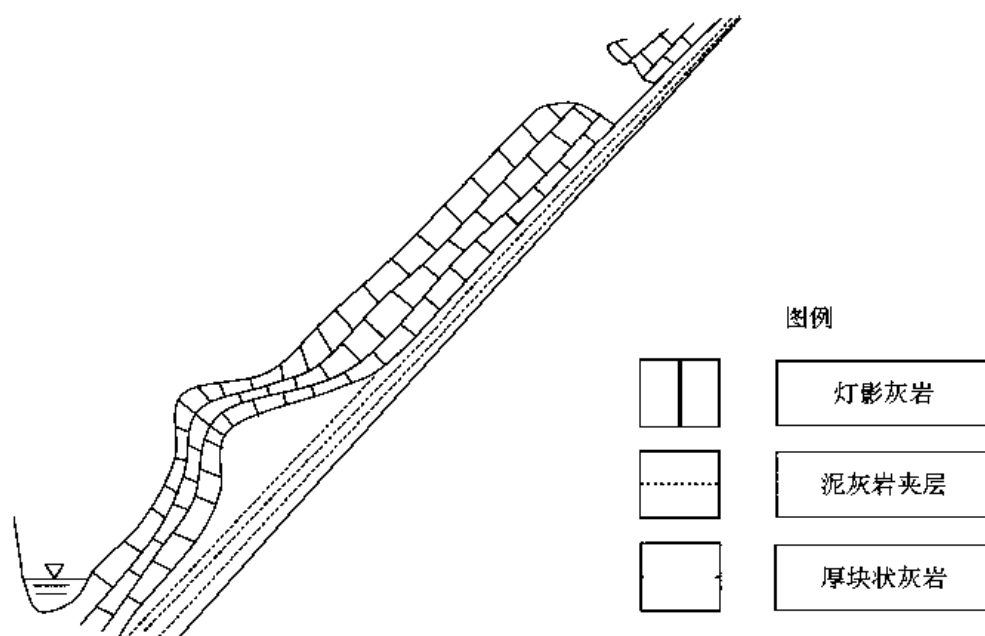
对斜坡弯曲破坏,许多研究者已经做出了巨大努力来研究这类滑坡的发生机理。Kutter<sup>[2]</sup>简单讨论了英国露天煤矿的弯曲破坏,Corbyn<sup>[3]</sup>把失稳与弯曲岩板所受的张应力联系起来进行分析,Cavers<sup>[4]</sup>应用欧拉压杆失稳的概念提出了简单的公式评价稳定性,Pant and Adhikary<sup>[5]</sup>应用数值模拟的方法研究了弯曲破坏机制,孙广忠<sup>[1]</sup>、李强等<sup>[6]</sup>把岩板弯曲问题看作梁的稳定问题,建议用能量平衡方法求解。这些方法仅仅能够描述梁的连续变化,而对滑移-弯曲斜坡破坏,它通常经历一个长期连续的变化,到最后才发生突然破坏。因此,在斜坡失稳临界点的行为,以上方法均不能很好描述。再者,上述方法没有考虑孔隙水压力和垂直于坡面的荷载分量作用,不能反映在失稳点的不连续行为,因此,上述这些方法对理解滑移-弯曲斜坡机理是不全面的,甚至有某些偏差。为此,应该发展评价该类斜坡稳定性的新方法。

突变理论是法国数学家Thom<sup>[7]</sup>创立的模拟不连续和突然变化现象的一门新学科。它已被广泛应用于包括地质和岩石力学研究的很多领域<sup>[8-11]</sup>。显然,滑坡是一种不连续突变现象,因此,用突变理论描述滑坡比其他描述连续现象的数学工具更合理。鉴于此,我们对滑移-弯曲斜坡提出了一个尖点突变模型,并用它研究了斜坡失稳机制。

参照对滑移-弯曲斜坡失稳的研究方法,我们接着研究了近水平及陡立岩层的几何失稳力学模型,给出了失稳判据,并结合实例进行了验证。



(a) 变形前



(b) 变形过程中

图 9-1 雅砻江霸王山滑坡破坏过程示意图

## 第二节 滑移-弯曲斜坡失稳尖点突变模型

### 一、力学模型

在岩板自重和孔隙水压力的作用下,坡脚处的岩板逐渐弯曲,上部岩板沿软弱夹层滑移(图9-2(a))。在岩板长度和宽度远大于它的厚度条件下,岩板的弯曲可以被简化成梁的稳定问题,其力学模型如图9-2(b)所示。令斜坡弯曲的长度、滑移段的长度、岩板总厚度与坡角分别为 $l$ 、 $l_0$ 、 $h$ 和 $\alpha$ ,则沿夹层的剩余下滑力为:

$$P = [q \sin \alpha - (c + q \cos \alpha \tan \phi)] l_0 \quad (9-1)$$

式中,  $q = \gamma h$  是重力荷载集度;  $\gamma$  是岩板容重;  $c$  和  $\phi$  是软弱夹层的内聚力和内摩擦角。

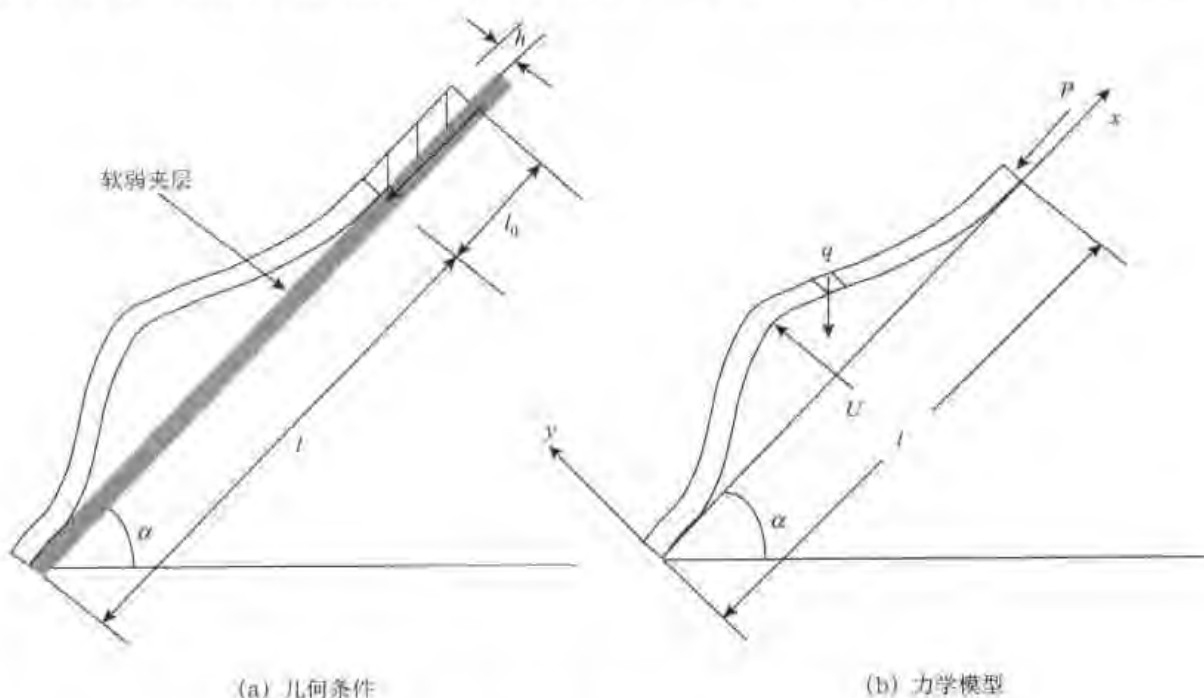


图9-2 滑移-弯曲斜坡力学模型

用 $U$ 表示降雨沿结构面渗入坡体内的孔隙水压力。为简化分析,假定此压力是常数或为线性分布,并且只在弯曲段承受水压力作用。

根据孙广忠教授<sup>[1]</sup>做的岩柱单轴压缩实验,岩板挠曲曲线能够被合理假定为:

$$y = u \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (9-2)$$

式中,  $u$  是在  $x = l/4$  处的挠度。容易验证公式(9-2)满足边界条件。

### 二、系统的势函数

考虑滑移-弯曲斜坡准静态运动过程,我们首先建立总势能的表达式,然后确定斜坡失稳力学判据。

根据弹性理论, 梁的应变能为:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l M(x) d\varphi \quad (9-3)$$

式中,  $M(x)$  是距坡脚距离为  $x$  处的弯矩;  $d\varphi$  能够被表达为:

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} ds \quad (9-4)$$

式中,  $E$  和  $I$  是梁的弹模和惯性矩;  $ds$  是对应于弧度  $d\varphi$  的弧长;  $\rho$  是弯曲半径。应用已知表达式:

$$M(x) = EIy'' \quad (9-5)$$

并把式(9-4)和式(9-5)代入式(9-3), 得到:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (9-6)$$

式中,  $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ ;  $y'$  与  $y''$  是  $y$  的一阶和二阶微分。对方程(9-6)作 Taylor 展开, 并取:

$$ds \approx 1 + 0.5(y')^2 \quad (9-7)$$

进一步得到:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 \left[ 1 + \frac{1}{2}(y')^2 \right] dx = \frac{EI}{32} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^6 u^4 + \frac{EI}{4} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^4 u^2 \quad (9-8)$$

下滑力  $P$  做的功是:

$$V_2 = \frac{1}{2} P \int_0^l (y')^2 dx = \frac{Pl}{4} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 u^2 \quad (9-9)$$

梁自重做的功是:

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^l q(l-x)(y')^2 \sin\alpha dx = \frac{ql^2}{8} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin\alpha u^2 \quad (9-10)$$

梁自重产生的势能增量是:

$$V_4 = \int_0^l qy \cos\alpha dx = ql \cos\alpha \quad (9-11)$$

孔隙水压力  $U$  做的功是:

$$V_5 = Uu \quad (9-12)$$

系统的总势能是:

$$V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4 - V_5 \quad (9-13)$$

把方程(9-8) ~ (9-12)代入方程(9-13), 得到:

$$V = \frac{EI}{32} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^6 u^4 + \frac{1}{4} \left[ EI \left( \frac{2\pi}{l} \right)^4 - Pl \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} ql^2 \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin\alpha \right] u^2 + (ql \cos\alpha - U)u \quad (9-14)$$

上式即是系统能量的表达式。

### 三、系统的尖点突变模型

对方程(9-14)作变量代换, 以把它变成尖点突变的标准型式, 令:

$$x = \left[ \frac{EI}{8} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^6 \right]^{1/4} u \quad (9-15)$$

$$a = \frac{1}{2} \left[ EI \left( \frac{2\pi}{l} \right)^4 - Pl \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{ql^2}{2} \sin \alpha \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \right] \left[ \frac{8}{EI \left( \frac{2\pi}{l} \right)^6} \right]^{1/2} \quad (9-16)$$

$$b = (ql \cos \alpha - U) \left[ \frac{8}{EI \left( \frac{2\pi}{l} \right)^6} \right]^{1/4} \quad (9-17)$$

把方程(9-15) ~ (9-17)代入方程(9-14), 得到:

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (9-18)$$

方程(9-18)是以  $a$  和  $b$  作为控制参数,  $x$  作为状态变量的尖点突变模型<sup>[7]</sup>的标准型式。

由所有平衡点组成的平衡曲面能够由方程(9-18)导出, 即

$$\frac{dV}{dx} = x^3 + ax + b = 0 \quad (9-19)$$

方程(9-19)是力的平衡条件。

奇点集能够由下式得到:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 3x^2 + a = 0 \quad (9-20)$$

分岔集决定了突变行为的区域, 也就是说, 如果运动的轨线穿过分岔集, 突变行为能够发生。联立方程(9-19)和(9-20), 消去  $x$ , 分岔集方程能够被表示为:

$$4a^3 + 27b^2 = 0 \quad (9-21)$$

把方程(9-16)与(9-17)代入方程(9-21), 得到:

$$\left( \frac{4\pi^2 EI}{l^2} - \frac{1}{2}ql \sin \alpha - P \right)^3 + \frac{27EI}{4l^2} (ql \cos \alpha - U)^2 = 0 \quad (9-22)$$

方程(9-22) ( $b < 0$ ) 是系统失稳的充要条件。可以看出, 滑移-弯曲斜坡失稳取决于平行和垂直坡面的力的某种组合, 而与强度无关。

由方程(9-22)知道, 只有左边第一项不大于零, 才可能满足失稳的充要条件, 因此, 失稳的必要条件为:

$$P \geq \frac{4\pi^2 EI}{l^2} - \frac{1}{2}ql \sin \alpha \quad (9-23)$$

该表达式正是孙广忠<sup>[1]</sup>与李强等<sup>[6]</sup>提出的破坏判据, 他们仅给出了失稳的必要条件, 而非充要条件。

#### 四、临界驱动比 $l_0/(l+l_0)$ 与坡角 $\alpha$ 的关系

将方程(9-1)代入方程(9-22), 得到:

$$\left[ (q \sin \alpha - c - q \cos \alpha \tan \phi) l_0 + \frac{1}{2}ql \sin \alpha - \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \right]^3 = \frac{27EI}{4l^2} (ql \cos \alpha - U)^2 \quad (9-24)$$

式中,  $l+l_0 = H/\sin \alpha$ ;  $H$  为坡高。根据方程(9-24), 我们能够调查临界驱动比(驱动段坡长  $l_0$  与总坡长  $l+l_0$  的比值)与坡角  $\alpha$  的关系。图 9-3 给出了当方程(9-24)右边为零, 即不考虑法向力时的  $l_0/(l+l_0)$  与  $\alpha$  的关系曲线, 可看出, 随坡角的增大, 驱动比减小, 这与 Cavers<sup>[4]</sup>, 孙广忠<sup>[1]</sup>, 李强等<sup>[6]</sup>, Pant 等<sup>[5]</sup>学者得出的结论一致。为研究孔隙水压力

对驱动比的影响,假定  $U \propto ql \sin \alpha$ 。如图 9-4 所示,随孔隙水压力增大,临界驱动比减小,并也随坡角增大而减小。这意味着较高的水压力能够减小失稳所需的驱动力,也能使坡角较缓的斜坡失稳。

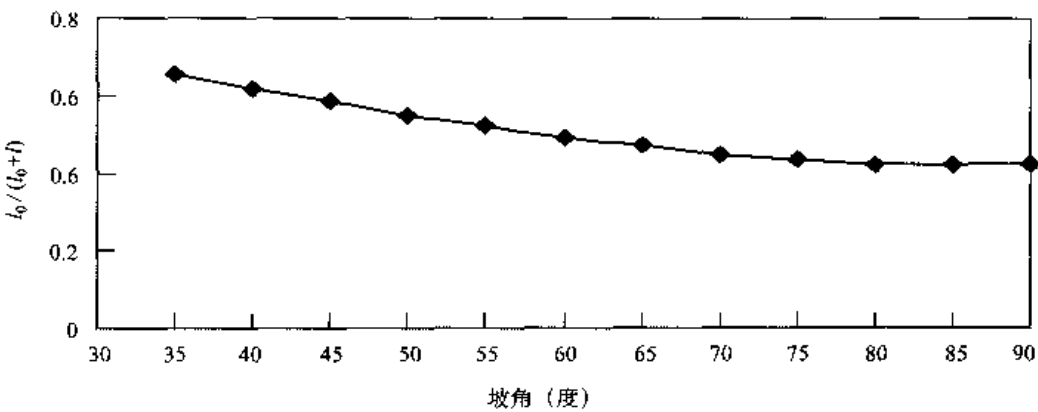


图 9-3 不考虑法向力时临界驱动比  $l_0/(l+l_0)$  随坡角  $\alpha$  的变化

$h = 10 \text{ m}$ ,  $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 0$ ,  $\phi = 10^\circ$ ,  $E = 10^4 \text{ MPa}$ ,  $H = 800 \text{ m}$

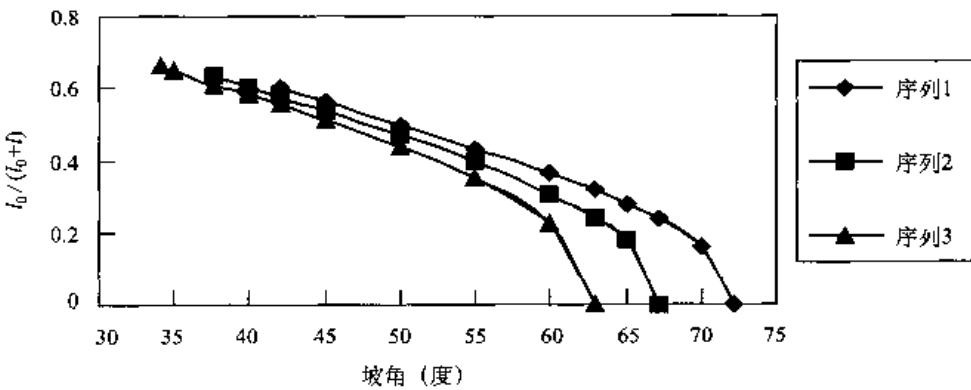


图 9-4 临界驱动比  $l_0/(l+l_0)$  随坡角  $\alpha$  的变化

$h = 10 \text{ m}$ ,  $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 0$ ,  $\phi = 10^\circ$ ,  $E = 10^4 \text{ MPa}$ ,  $H = 800 \text{ m}$

序列 1:  $U = 1.1ql \sin \alpha$ , 序列 2:  $U = 1.3ql \sin \alpha$ , 序列 3:  $U = 1.5ql \sin \alpha$

### 第三节 滑移-弯曲斜坡失稳实例研究

霸王山滑坡坡高 940 m, 坡角  $40^\circ$ , 发生于 1983 年(图 9-1)。斜坡岩板由灯影灰岩组成, 岩板厚 10 m, 岩板与坡面近似平行, 其下为一泥灰岩软弱夹层, 下伏岩层为厚块状灰岩, 不可能产生滑动。根据孙广忠<sup>[1]</sup> 的测试, 力学参数如下: 软弱夹层的  $c = 0.04 \text{ MPa}$ 、 $\phi = 17^\circ$ ; 灰岩的  $E = 5 \times 10^4 \text{ MPa}$ 、 $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ 。

#### 一、下滑力计算

斜坡总长  $l + l_0 = 940 / \sin 40^\circ = 1462 \text{ m}$ 。把参数  $c = 0.04 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 17^\circ$  和  $h = 10 \text{ m}$  代入方程(9-1), 得到:



$$P = 7.03 \times 10^{-2} l_0 \text{ (MN)} \quad (9-25)$$

这说明上部岩板能够沿软弱夹层滑动。

## 二、斜坡破坏的突变分析

根据方程(9-23), 斜坡破坏的必要条件是:

$$7.03 \times 10^{-2} l_0 \geq \frac{4\pi^2 EI}{(l - l_0)^2} - \frac{1}{2} q(l - l_0) \sin \alpha \quad (9-26)$$

把有关参数代入方程(9-26), 得到:  $l_0 \leq 301 \text{ m}$ 。根据霸王山滑坡后的地质调查资料, 估计下滑段的长度是 272 m, 这说明霸王山斜坡有可能向不稳定状态演化。

把  $l_0 = 272 \text{ m}$ ,  $U = 0$  和有关参数代入方程(9-22), 得到:

$$\left( \frac{4\pi^2 EI}{l^2} - \frac{1}{2} ql \sin \alpha - P \right)^3 + \frac{27EI}{4l^2} (ql \cos \alpha - U)^2 = 1202918 > 0 \quad (9-27)$$

这说明, 如果不考虑孔隙水压力, 霸王山斜坡是稳定的。因此, 我们能够合理推断霸王山斜坡在它的演化历史上曾受过暴雨或地下水的作用, 否则该滑坡不可能发生。应用方程(9-22), 失稳需要的孔隙水压力能够被解出, 计算出的临界值  $U = 242.62 \text{ MN}$ 。根据 Hock 等人<sup>[12]</sup>提出的公式, 水压力的估计值是:

$$U = \frac{1}{4 \sin \alpha} \gamma_w H_w^2 = 2278.5 \text{ MN} \quad (9-28)$$

式中,  $\gamma_w$  是水的容重;  $H_w$  ( $H_w = H - l_0 \sin \alpha$ ) 是水压力作用的坡高。这说明此滑坡在水压力的作用下能够发生。

## 第四节 层状岩体失稳的尖点突变模型

层状岩体中倾倒变形、弯曲拉裂和地下洞室中弯折内鼓破坏等型式比较常见。这是一类几何非稳定问题, 其力学模型可简化为梁, 用突变理论进行分析。

### 一、层状岩体弯折内鼓破坏的尖点突变模型

这类变形破坏是层状, 特别是薄层状围岩变形破坏的主要型式。地质原型如图 9-5 所示, 简化的力学模型如图 9-6 所示。

#### 1. 近水平岩层失稳判据

对图 9-6(a)所示的力学模型, 设梁的长度为  $l$ , 宽度取单位宽度, 厚度为  $h$ , 弹性模量为  $E$ , 水平挤压力为  $P$ , 上覆岩层压力及梁的重力荷载分布集度之和为  $q$ 。设挠度曲线为:

$$y = \frac{u}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (9-29)$$

式中,  $u$  为  $x = l/2$  处的挠度。容易验证其满足边界条件。

仿上推导, 易得到系统势函数的表达式为:

$$V = \frac{1}{8} EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^6 u^4 + \left[ EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 - \frac{1}{4} Pl \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] u^2 - \frac{1}{2} q l u \quad (9-30)$$

式中,  $I$  为梁的惯性矩。

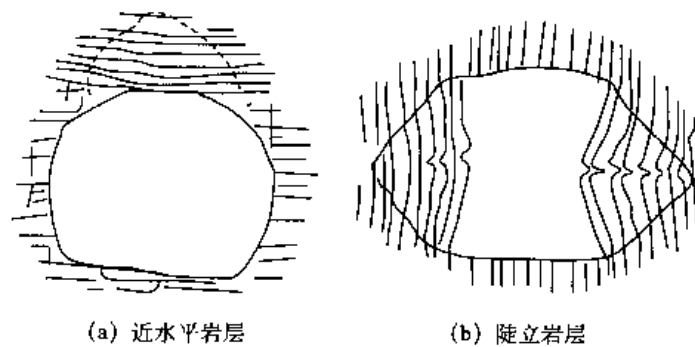


图 9-5 薄层状围岩的弯折内鼓破坏

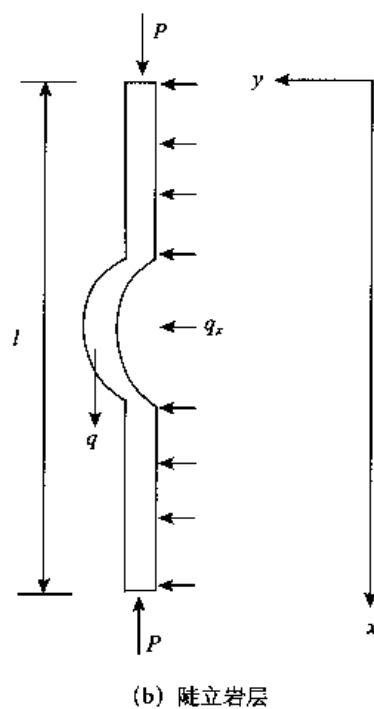
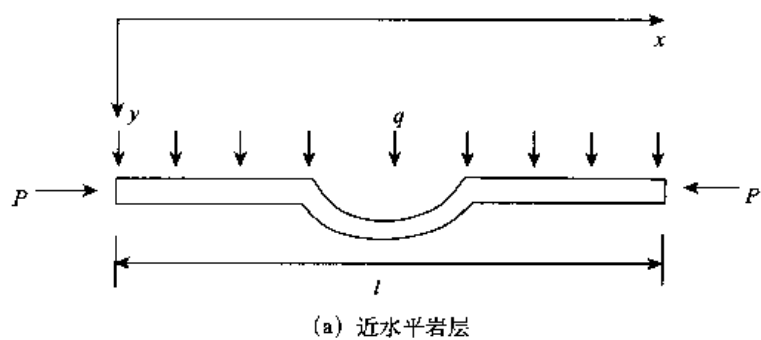


图 9-6 简化的力学模型

令：

$$x = \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^6 \right]^{1/4} u \quad (9-31)$$

$$a = 2 \left[ EH \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 - \frac{1}{4} Pl \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] \left[ \frac{1}{2} EH \left( \frac{\pi}{l} \right)^6 \right]^{-1/2} \quad (9-32)$$

$$b = \frac{1}{2} ql \left[ \frac{1}{2} EH \left( \frac{\pi}{l} \right)^6 \right]^{-1/4} \quad (9-33)$$

可得到尖点突变模型的标准型式。把式(9-32)与式(9-33)代入式(9-21), 可得到失稳的充要力学条件判据为:

$$\left( \frac{4\pi^2 EI}{l^2} - P \right)^3 + \frac{27}{4} EI q^2 = 0 \quad (9-34)$$

可见水平岩层失稳与否, 仅取决于力的组合条件和材料性质, 而与强度无关。

## 2. 陡立岩层失稳判据

对图 9-6(b) 所示的力学模型, 也易得到失稳的充要力学条件为:

$$\left( \frac{4\pi^2 EI}{l^2} - P - \frac{1}{2} ql \right)^3 + \frac{27}{4} EI q_x^2 = 0 \quad (9-35)$$

式中,  $q_x$  为水平向应力。可见, 陡立岩层失稳, 只与力的组合条件及材料的几何、力学性质有关, 仍与强度无关。

## 二、实例分析

白龙江碧口水电站左岸泄洪洞由陡倾角千枚岩组成, 单层厚 3 cm。千枚岩单轴抗压强度  $\sigma_c = 12$  MPa,  $E = 3000$  MPa。设计隧洞近圆形, 洞径为 12.9 m。回弹应力  $q_x = 77.52$  Pa, B 点应力  $\sigma_{xx} = 0$ ,  $\sigma_{xx} = 7.0$  MPa。施工中曾发生过塌方(如图 9-7 所示)。现做一次校核分析(资料引自文献 [1])。

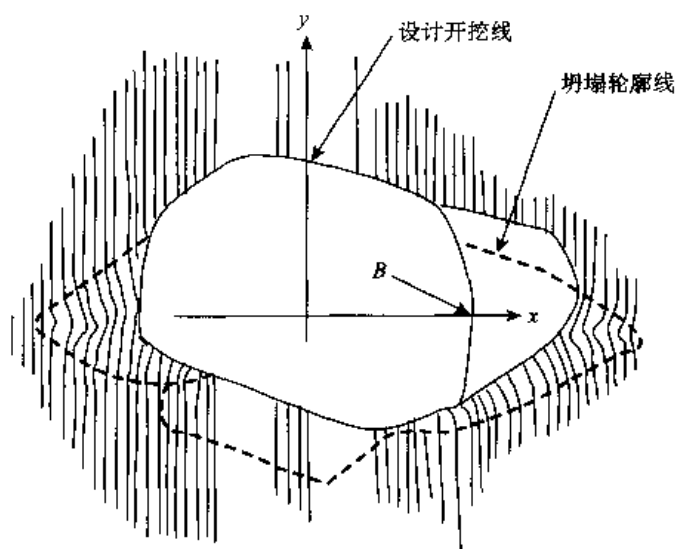


图 9-7 碧口水电站左岸泄洪洞破坏素描

根据强度准则, 可定义安全系数为:

$$\eta = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ix}} \quad (9-36)$$

对于 B 点有,  $\eta = 12/7 = 1.7 > 1$ 。即按材料强度, 不应发生破坏。

取千枚岩容重  $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$ , 则  $q = 780 \text{ N/m}$ , 将已知数据代入式(9-35), 可解得  $P = -3.5 \text{ kN}$ , 表明该洞壁围岩不能稳定必然破坏, 这与实际情况一致。

两种计算结果表明, 对层状岩体几何失稳问题, 传统的强度准则常常失效, 而由突变理论导出的失稳判据, 则比较有效。

### 三、层状岩体弯曲—拉裂失稳判据

弯曲—拉裂变形主要发育在直立或陡倾坡外的层状岩体中。陡倾的板状岩体在自重产生的弯矩作用下, 由前缘开始向临空方向作悬臂梁式弯曲, 弯曲的板梁之间被拉裂, 并逐渐向坡内发展。地质模型及简化的力学模型如图 9-8 所示。

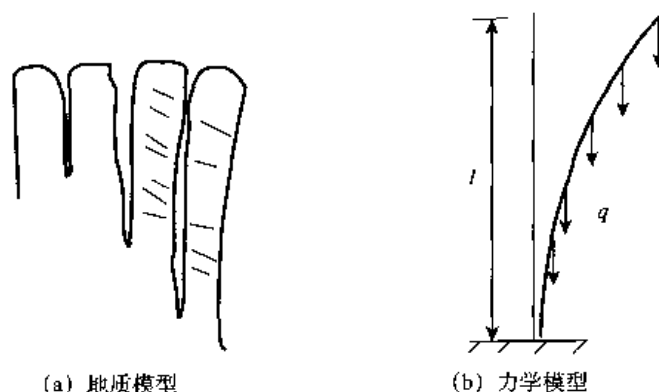


图 9-8 层状岩体弯曲—拉裂破坏的地质模型与简化的力学模型

#### 1. 失稳判据

仅考虑自重荷载, 由突变理论与弹性理论导出的失稳判据等同。其失稳判据为:

$$q = \frac{7.83EI}{l^3} \quad (9-37)$$

#### 2. 盐池河岩崩分析

盐池河岩崩的山体为三面临空的陡壁, 在标高 720 ~ 850 m 处耸立高 130 m 的白云岩。其  $E = 20000 \text{ MPa}$ ,  $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ 。岩层厚约 2 m。开矿放顶后, 以弯曲—拉裂形式破坏崩塌(资料引自文献 [6])。

将已知参数代入式(9-37), 可解得临界失稳高度  $l_c = 124.6 \text{ m}$ , 其安全系数  $\eta = 124.6/130 = 0.96$ , 表明该岩体不稳定。

## 第五节 结 论

对滑移—弯曲斜坡, 应用突变理论提出了一个尖点突变模型, 给出了失稳的充要条件判据。发现对于给定几何及力学条件的斜坡, 斜坡的失稳取决于平行于斜坡和垂直于斜坡的力的某种组合, 以前的方法和模型仅提供了失稳的必要条件。应用突变模型对霸王山滑坡进行了稳定性分析, 指出尽管该滑坡有可能发生, 如果不考虑水压力作用, 该斜坡仍能保持稳定。

参照对滑移-弯曲斜坡的研究方法,应用突变理论方法给出了层状岩体弯折内鼓破坏与层状岩体弯曲-拉裂破坏的失稳判据,发现层状岩体几何失稳只与力的组合条件及材料的几何、力学性质有关,仍与强度无关。

我们强调在进行斜坡稳定性评价前,应该详细调查斜坡的演化过程或历史。因为力的组合模式不同,斜坡的演化路径也不同,这可能导致不同、甚至相反的评价结论。

## 参 考 文 献

- [1] 孙广忠. 岩体结构力学. 北京: 科学出版社, 1988.
- [2] Kutter H K. Mechanisms of slope failure other than pure sliding. *Rock Mechanics, International Center for Mechanical Sciences, Courses and Lectures No. 165*, L. Müller ed. New York: Springer, 1974.
- [3] Corbyn J A. Stress distribution in laminar rock during sliding failure. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, Vol. 15, 113 ~ 119, 1978.
- [4] Cavers D S. Simple methods to analyze buckling of rock slopes. *Rock Mech.*, Vol. 14, 87 ~ 104, 1981.
- [5] Pant S R and Adhikary D P. Implicit and explicit modelling of flexural buckling of foliated rock slopes. *Rock Mech. Rock Engng.*, Vol. 32, No. 2, 157 ~ 164, 1999.
- [6] 李强, 张倬元. Mechanism of buckling and creep-buckling failure of the bedded rock masses on the consequent slope. *Land-slides*. Balkema. 625 ~ 634, 1991.
- [7] Thom R. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Benjamin, New York. 1972.
- [8] Cubbit J M, Shaw B. The geological implications of steady-state mechanisms in catastrophe theory. *Mathematical Geology*, Vol. 8, No. 6, 657 ~ 652, 1976.
- [9] Henley S. Catastrophe theory models in geology. *Mathematical Geology*, Vol. 8, No. 6, 649 ~ 655, 1976.
- [10] Saunders P T. *An introduction to catastrophe theory*. Cambridge University Press, 1980.
- [11] 秦四清, 张倬元, 王士天, 黄润秋. 非线性工程地质学导引. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.
- [12] Hoek E and Bray J W. *Rock Slope Engineering*, 3rd ed. London: The Institute of Mining and Metallurgy, 1981.

# 第十章 煤柱-顶板系统协同作用的脆性失稳与非线性演化机制

## 第一节 引言

在世界范围内的地下采矿中,岩爆或煤爆(在矿山中称为冲击地压)经常发生,造成重大的人员伤亡和地下设施的损害<sup>[1]</sup>。现在已发生冲击地压的国家有南非、德国、英国、俄罗斯等 20 多个<sup>[2]</sup>。1933 年我国抚顺胜利矿最早发生冲击地压,1960 年全国发生冲击地压的矿井只有 6 个,到 1990 年仅煤炭部所属煤矿发生冲击地压的已增加到 58 个,近几年来已超过 100 个<sup>[3]</sup>。

最早对冲击地压机制的研究<sup>[4]</sup>是从传统的强度观点出发,建立冲击地压发生的力学判别准则,但岩(煤)可能会以缓慢的方式破坏,并不一定会产生冲击地压,引起许多学者对这种理论表示怀疑。冲击地压是岩(煤)的一种猛烈破坏方式,它的发生在很大程度上取决于岩(煤)破坏的刚度性质<sup>[5]</sup>。从刚性、伺服控制试验机试验知道,破坏过程及有关的声发射或微震以及失稳的程度,取决于加载系统的刚度<sup>[6]</sup>。对煤柱而言,采矿条件和煤柱及围岩的力学属性控制着系统的刚度及煤柱的行为,可以推测,其失稳也应该取决于煤柱与围岩的刚度性质。

突变理论是 Thom<sup>[7]</sup>发展的一种用于模拟不连续突变现象的数学技术。该理论已广泛应用于包括地质和岩石力学的很多方面。秦四清等<sup>[8]</sup>、唐春安<sup>[5]</sup>与 Henley<sup>[9]</sup>等人分别在斜坡失稳、水库诱发地震、岩样失稳和断层运动研究中提出了一些尖点突变模型;潘一山等和章梦涛<sup>[10]</sup>、秦四清等<sup>[8]</sup>、徐曾和等<sup>[11]</sup>假设煤柱本构模型为负指数模型,研究了煤柱-顶板失稳的力学机制,得出了失稳的必要条件为顶板抗弯刚度与煤柱峰后刚度比小于 1 的结论,但由于应用的本构模型过于简单,不能反映对岩(煤)力学性质影响的重要性指标——岩石或煤的均匀性或脆性指标对失稳的影响,分析结果可能会有失偏颇。冲击地压是一种不连续突变现象,用突变理论研究它的力学行为更为合适。

目前已有许多研究试图探测岩爆以及煤与瓦斯突出的原因,并预测它们的发生。用来探测岩爆的方法包括<sup>[1]</sup>:微重力法、流变方法、回弹方法、钻筒屈服法、微地震法等等。尽管所有这些方法均被广泛采用,但没有一种方法是完全可靠的,很成功的例子几乎没有。美国矿山局最早(1939)使用微地震或声发射(AE)技术来预测岩爆,但至今只有很少几例获得成功。原因可能有两个方面<sup>[1]</sup>:第一可能是岩爆的物理过程相当复杂,难于建立岩爆发生的力学模型;另一个是现场监测得到的微震数据没有很好利用。只有把 AE 或微震与冲击地压的物理联系以及前兆机制搞清楚了,才能比较准确地作出预报。在实际监测中,有可能预报了发生冲击地压,但实际未发生;有可能未预报,但发生了冲击地压。

预报的精度和成功与否,都取决于对其失稳物理机制的深入理解。有些学者<sup>[12]</sup>根据 AE 记录和其他监测数据等,运用各种回归模型进行统计预报,取得了事后检验预报的成功。但这些“人为”的成功,不仅与预报选用的阶段数据和模型有关,而且都是不可在实践中重复检验的,值得怀疑。正如 Rat<sup>[13]</sup>所指出的,事后统计预报方法一般是很不可靠的,是有“诡计”的。客观准确地预报冲击地压发生与否,必须从统计预报转变为物理预报,当然这是一条艰辛之路,但也是一条正确的并有光明前途的阳光之路。

本章用突变理论,对坚硬顶板和底板下,煤柱-顶板系统的失稳及其演化的非线性动力学以及声发射机制,进行了系统分析。我们把顶板视为弹性梁,对煤柱的本构关系用 Weibull 分布模型描述,研究了失稳的充要力学条件准则、突跳释能机制、失稳演化与蠕变三阶段的关系、系统演化的非线性动力学模型与失稳过程 AE 的物理模型及特征,对失稳机制和宏观破坏物理现象有了更深入地理解。

## 第二节 煤柱-顶板系统协同作用的尖点突变模型与失稳机制

### 一、力学模型

矿山中冲击地压有相当一部分是发生在各种煤柱中。在坚硬的岩石顶板和底板下采用房柱式或刀柱式采煤时,如工作面很宽,常预留煤柱支撑顶板。因煤柱渐进破坏发生冲击地压时,顶板岩层并不破坏,仅参与释放能量,如大同煤矿与江苏三和尖煤矿发生的冲击地压就是如此。考虑工作面很宽且对称,煤柱宽度  $b$  和顶板厚度  $h_0$  远小于工作面推进度,因此,可把顶板岩层视为弹性梁。梁的自重及上部煤(岩)层的重力简化为强度为  $q$  的分布力,作用于梁顶面。在以上条件下,煤柱的压缩量将远大于未采煤层的压缩量。为简化分析,设未采煤层是刚性的,梁是固支的,其力学模型如图 10-1 所示。

根据损伤力学<sup>[14]</sup>,在单轴压缩下,岩石或煤的本构关系能够表达为:

$$\sigma = E\varepsilon[1 - D(\varepsilon)] \quad (10-1)$$

式中,  $\sigma$  和  $\varepsilon$  分别是岩(煤)样的应力和弹模;  $D(\varepsilon)$  为损伤变量。

煤柱的本构关系是具有弱化性质的非线性关系。Hudson 和 Fairhurst<sup>[15]</sup>曾用正态分布模型描述这种弱化性质;潘一山等<sup>[10]</sup>,徐曾和等<sup>[11]</sup>曾用负指数模型描述之;秦四清等<sup>[16]</sup>,唐春安<sup>[5]</sup>则采用 Weibull 分布模型描述之。Weibull 分布模型能够很好地描述试验结果,具有广泛的适用性。这里我们采用 Weibull 分布模型描述煤柱的本构关系,即

$$\sigma = E\varepsilon \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m\right] \quad (10-2)$$

$$D(\varepsilon) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m\right] \quad (10-3)$$

式中,  $\varepsilon_0$  为平均应变的测度;  $m$  是曲线形状参数,它的物理意义是局部强度变化的测度,称为均匀性指标。 $m=1$  时,分布为指数的;  $m=5$  时,很接近正态分布;当  $m \rightarrow \infty$  时,强度变化趋于零,材料性质为理想脆性的,例如玻璃就是这种材料。可看出,  $m$  越大,材料的均匀性及脆性程度越大,其应变软化性质越明显(如图 10-2 所示),我们也可称  $m$  为脆性指标。

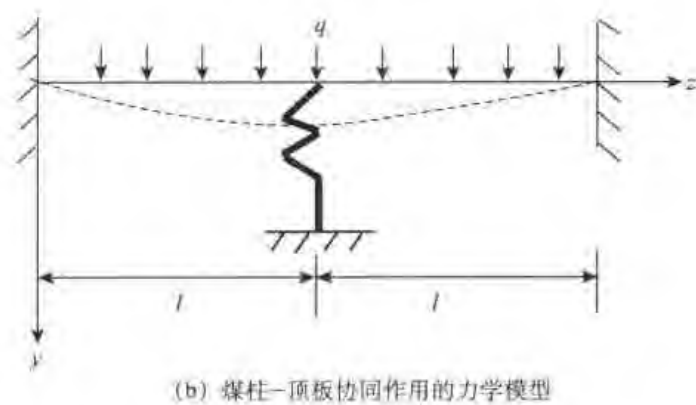
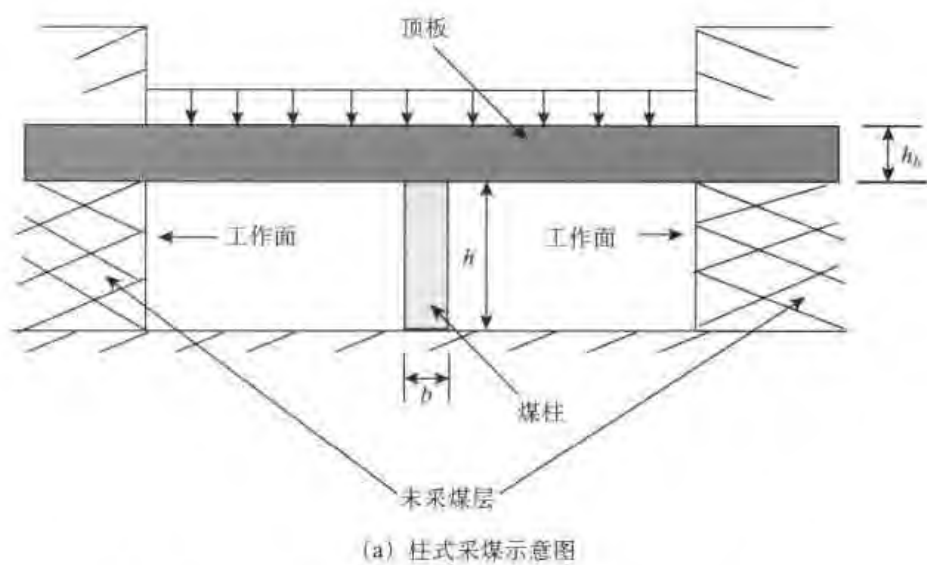


图 10-1 柱式采煤煤柱—顶板系统的力学模型

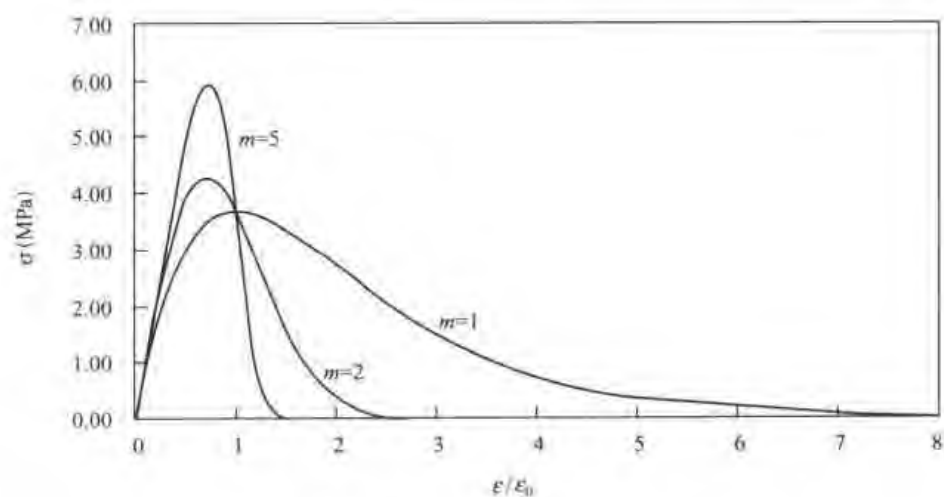


图 10-2 不同  $m$  值的应变软化介质的本构曲线 ( $E = 100 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_0 = 0.1$ )



对截面面积为  $A$ ，高为  $h$  的煤柱，可把式(10-2)表达为力  $P$  与煤柱压缩量  $u$  的关系，即

$$P = k_0 u \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] \quad (10-4)$$

式中， $k_0 = \frac{EA}{h}$  为煤柱的初始刚度。根据材料力学理论<sup>[17]</sup>，梁的弯曲方程为：

$$E_e I y'' = \frac{1}{2} q z^2 - \left( q l - \frac{1}{2} P \right) z + \frac{1}{3} q l^2 - \frac{1}{4} P l \quad (10-5)$$

其边界条件满足： $y'(0) = y(0) = 0$ 。对式(10-5)积分并利用边界条件得到：

$$E_e I y = \frac{1}{24} q z^4 - \frac{1}{6} \left( q l - \frac{1}{2} P \right) z^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} q l^2 - \frac{1}{4} P l \right) z^2 \quad (10-6)$$

当  $z = l$  时的挠度为  $u$ ，代入上式，得到：

$$P = k_0 u \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] = q l - \frac{24 E_e I}{l^3} u \quad (10-7)$$

## 二、尖点突变模型

弹性梁和煤柱组成的力学系统，其力的平衡条件(平衡曲面)可由式(10-7)得到：

$$\frac{dV}{du} = k_0 u \exp \left[ - \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \right] + \frac{24 E_e I}{l^3} u - q l = 0 \quad (10-8)$$

式中， $V$  为系统的势能； $E_e$  为梁的弹性模量； $I$  为梁的惯性矩。

根据平衡曲面的光滑性质，可求得尖点。在尖点处，有  $V''' = 0$ ，得到：

$$u = u_1 = u_0 \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (10-9)$$

即尖点位于煤柱本构曲线的拐点处。将平衡曲面方程(10-8)，相对于  $u_1$  作 Taylor 展开，并截取至 3 次项，得到：

$$\frac{1}{6} k_0 m (m+1)^2 \exp \left( - \frac{m+1}{m} \right) u_1 (x^3 + ax + b) = 0 \quad (10-10)$$

其中，

$$x = \frac{u - u_1}{u_1} \quad (10-11)$$

$$a = \frac{6}{(m+1)^2} (k-1) \quad (10-12)$$

$$b = \frac{6}{m(m+1)^2} (1 + mk - \xi) \quad (10-13)$$

$$k = \frac{24 E_e I / l^3}{k_0 m \exp \left( - \frac{m+1}{m} \right)} = \frac{k_2}{k_1} \quad (10-14)$$

$$\xi = \frac{q l}{k_0 u_1} \exp \left( \frac{m+1}{m} \right) \quad (10-15)$$

$$k_2 = \frac{24 E_e I}{l^3} \quad (10-16)$$

$$k_1 = k_0 m \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) = \frac{EA}{h} m \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) \quad (10-17)$$

式中,  $k$  是梁的抗弯刚度  $k_2$  与煤柱本构曲线拐点处的绝对值刚度  $k_1$  之比, 简称为刚度比; 参数  $\xi$  与分布力  $q$  和煤柱在应变曲线拐点处的刚度  $k_1$  及位移  $u_1$  有关, 称为几何-力学参数。由式(10-12)和式(10-13)知, 系统的控制变量  $a$  和  $b$  完全由刚度比  $k$  和  $\xi$  决定。

将式(10-12)和式(10-13)代入分岔集方程

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 0 \quad (10-18)$$

得到:

$$D = 4\beta^3(k-1)^3 + 27\frac{\beta^2}{m^2}(1+mk-\xi)^2 = 0 \quad (10-19)$$

其中:

$$\beta = \frac{6}{(m+1)^2} \quad (10-20)$$

如图 10-3 所示, 三维空间的坐标分别为控制参数  $a$ ,  $b$  和状态变量  $x$ 。从 B 点出发, 随着控制参数的连续变化, 系统状态沿路径 B 演化到 B', 状态变量连续变化, 不发生突变; 而从 A 点出发沿路径 AA' 演化, 当接近折叠翼边缘时, 只要控制参数有微小的变化, 系统状态就会发生突变, 从折叠翼的下叶跃迁到折叠翼的上叶。这说明系统只有在跨越分岔集时, 才能发生突变。因此, 式(10-19)即为煤柱-顶板系统突发失稳的充要力学条件判据。

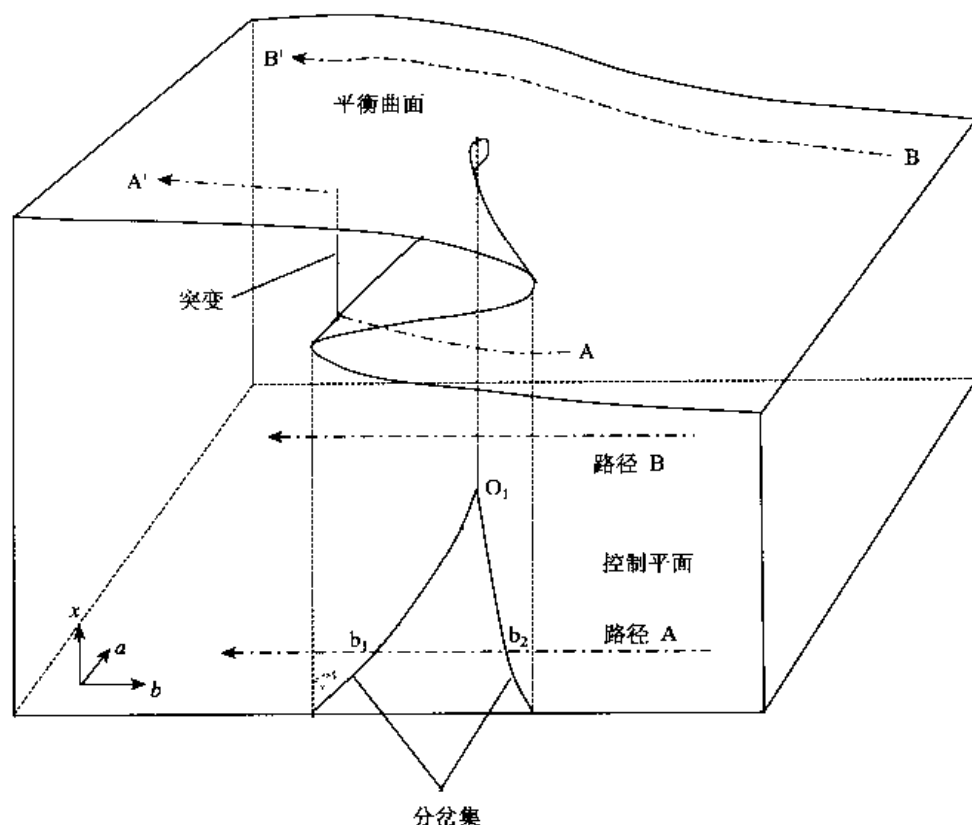


图 10-3 平衡曲面与尖点突变模型

由式(10-19)知, 当  $a \leq 0$ , 即  $k \leq 1$  时,  $D$  可能等于零。因此, 系统发生突变的必要条件是:

$$k \leq 1 \quad (10-21)$$

即系统失稳与刚度比有较大相关性。由式(10-14)知, 在其他参数不变的情况下,  $k$  随  $m$  的增大而减小。 $m$  值越大(刚度比越小), 即材料的脆性程度越高, 越易引发突变。

### 三、煤柱峰后刚度与尺度及含水量的关系

众所周知, 岩样或煤样有尺度效应。从图 10-4 可看出, 具有不同长径比的岩样, 它们的初始刚度值  $k_0$  不变, 但峰后刚度随长径比的增加而增加。这说明具有较小直径和较高高度的煤柱将对应较大的峰后刚度值和较小的刚度比, 更易于失稳。

图 10-5 说明水能够减小初始刚度  $k_0$  与均匀性指标  $m$ , 这将导致较大的刚度比和更稳定的系统, 意味着煤柱含水量的增加能够减小冲击地压发生的可能性。

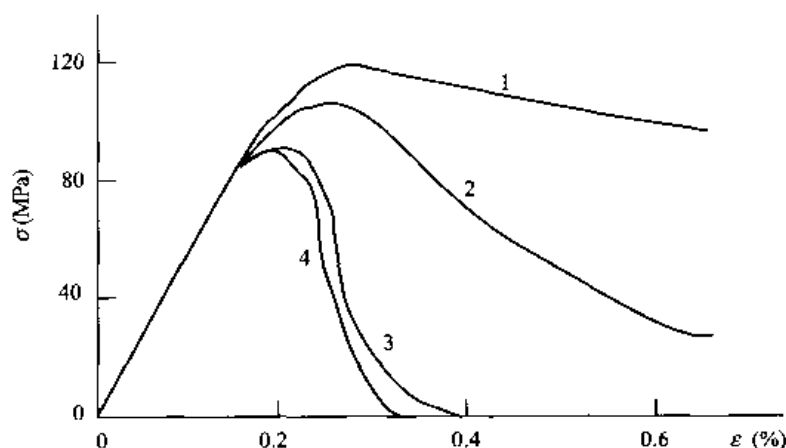


图 10-4 单轴压缩下, 不同长径比的大理岩应力应变曲线<sup>[6]</sup>  
1~4 长径比分别为 0.5, 1, 2, 3

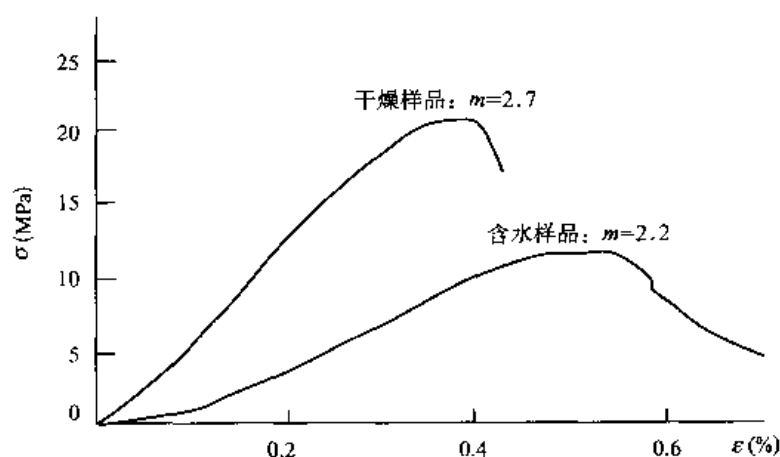


图 10-5 水对煤样应力应变曲线的影响<sup>[18]</sup>

#### 四、系统失稳机制

只有当刚度比、均匀性指标及几何-力学参数满足方程(10-19)时,冲击地压才能发生。该条件只有在煤柱变形进入应变软化阶段后才可能满足。此时,如果  $k > 1$ ,煤柱的变形将呈现逐渐破坏的特点,不能发生冲击地压;当  $k \leq 1$  且  $D \rightarrow 0$  时,即系统接近临界状态时,冲击地压能否发生还取决于外部扰动,如爆破震动等。在外部扰动触发下,煤柱产生突然变形,能量快速释放,冲击地压发生。因此,冲击地压的发生并非由于系统的强度不够,而是由于系统的刚度比较小导致的。值得注意的是,随开挖宽度增加,梁的弯曲刚度迅速减小,  $k \leq 1$  的条件容易满足。

在式(10-18)成立的条件下,当  $a < 0$  时,方程(10-10)有三个实根,分别是:

$$x_1 = 2\left(-\frac{a}{3}\right)^{1/2} = 2\sqrt{2} \frac{(1-k)^{1/2}}{(m+1)} \quad (10-22)$$

$$x_2 = x_3 = -\left(-\frac{a}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{2} \frac{(1-k)^{1/2}}{(m+1)} \quad (10-23)$$

于是跨越分岔集时( $b < 0$ )状态变量发生突跳(如图 10-6 所示),跳跃值为:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 3\sqrt{2} \frac{(1-k)^{1/2}}{(m+1)} \quad (10-24)$$

相应于煤柱失稳前后的突跳为:

$$\Delta u = u_1 \Delta x = 3\sqrt{2} \frac{(1-k)^{1/2}}{(m+1)} u_1 \quad (10-25)$$

可以看出,煤柱的突跳仅由均匀性(脆性)指标  $m$  和刚度比  $k$  及在拐点处的位移  $u_1$  决定。

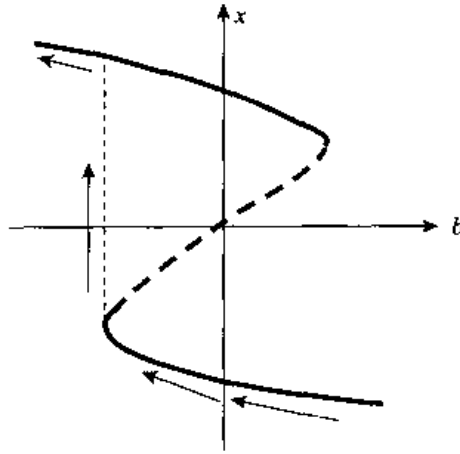


图 10-6 跨越分岔集时状态变量  $x$  的突跳

#### 五、系统演化与蠕变三阶段的关联性

将式(10-14)和式(10-15)代入式(10-13),得到:

$$b = \frac{6 \exp\left(\frac{m+1}{m}\right)}{m(m+1)^2 k_0 u_1} \left[ k_0 \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) u_1 + \frac{24 E_c I}{l^3} u_1 - ql \right] \quad (10-26)$$

可见,  $b$  的符号取决于系统在煤柱介质应变曲线拐点处, 顶板自重及上覆压力与梁和煤柱的抗力比较情况。 $b > 0$ ,  $= 0$ ,  $< 0$  分别对应着系统运动加速度为负(减速蠕变), 为零(等速蠕变), 为正(加速蠕变)的情况。图 10-3 中的路径 A 可以代表一个典型的冲击地压孕育发生的完整过程: 顶板运动做稳定—减速变形—匀速变形—加速变形, 直至发生冲击地压的全过程。

### 第三节 系统演化的非线性动力学模型

在以上分析中, 我们考虑了系统的准静态运动过程, 但没有考虑失稳的动力学过程。下面我们将建立煤柱—顶板系统演化的非线性动力学模型, 研究系统的动力学行为。

#### 一、非线性动力学模型

对煤柱应变软化介质, 如果考虑其黏滞或蠕变属性(图 10-7), 则其应力可表示为:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_\eta = E \varepsilon \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m\right] + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (10-27)$$

式中,  $\eta$  为黏滞系数。把上式变为荷载的表达式, 并代入平衡曲面方程(10-10), 得到:

$$\frac{\eta A}{h} \frac{du}{dt} = - \left\{ k_0 u \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m\right] + \frac{24 E_c I}{l^3} u - ql \right\} = - \frac{1}{6} k_0 m(m+1)^2 \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) u_1 (x^3 + ax + b) \quad (10-28)$$

上式可进一步变为:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{1}{6} \frac{E \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) m(m+1)^2}{\eta} (x^3 + ax + b) \quad (10-29)$$

式(10-29)是一个各参数具有明确意义的非线性动力学模型, 或称为物理预报模型, 只要根据室内实验和现场调查确定了各力学与几何参数, 就能对系统的变形规律作出预测。

从以上分析可知,  $a$  值表示失稳的可能性与难易程度,  $a \leq 0$  且越小时, 越易失稳; 从式(10-26)知,  $b$  值表示系统演化的蠕变阶段,  $b < 0$  表示在加速蠕变阶段。由式(10-29)知, 无量纲位移速率由  $a$ 、 $b$  值的变化所决定。在某一个  $x(x > 0)$  值时,  $a(a < 0)$  与  $b(b < 0)$  值越小, 即系统越接近失稳点, 位移速率越大。

现在, 我们研究式(10-29)在平衡态的性质, 令  $dx/dt = 0$ , 可知, 式(10-29)也是一个尖点突变, 其失稳的充要条件也是  $D = 4a^3 + 27b^2 = 0$ 。

从式(10-29)可看出, 无量纲的位移  $x$  由系统本身的力

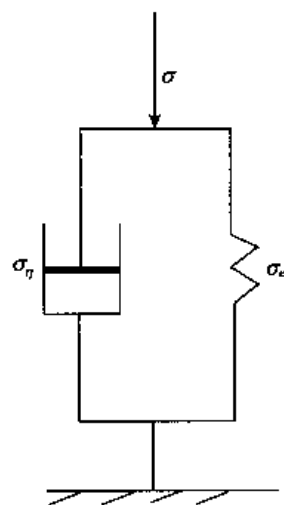


图 10-7 考虑黏滞力的应力模型

学参数与几何参数决定。如几何参数不变时,系统力学参数的变化将反映在 $(x, t)$ 关系曲线上,所以,顶板沉降观测时间序列曲线蕴含了力学参数变化的信息,有可能根据顶板沉降观测序列反演系统的力学参数。

## 二、非线性动力学模型的反演

如果有观测时序数据,即知道方程(10-29)的一系列特解,那么可根据观测数据反演其非线性动力学模型进行预测,其预测步骤如下:

(1) 因为实测的序列为 $(x, t)$ ,所以必须把 $(x, t)$ 序列转换为 $(u, t)$ 序列。

把式(10-11)代入式(10-29),得到:

$$\frac{du}{dt} = c_1 u^3 + c_2 u^2 + c_3 u + c_4 \quad (10-30)$$

式中,

$$c = -E \exp\left(-\frac{m+1}{m}\right) m(m+1)^2 / 6\eta \quad (10-31)$$

$$c_1 = c/u_1^2 \quad (10-32)$$

$$c_2 = -3c/u_1 \quad (10-33)$$

$$c_3 = (3+a)c \quad (10-34)$$

$$c_4 = [b - (a+1)]cu_1 \quad (10-35)$$

(2) 对方程(10-30)求解

根据观测序列,可对方程(10-30)求解,反演算出各常数值,这说明我们有可能根据 $(u, t)$ 时序观测数据反演力学参数。值得注意的是,用通常的最小二乘法解方程(10-30),其解常常是不稳定的,可用我们在第四章提出的改进 Backus 广义线性反演理论求解。求解后,可算出 $a$ 、 $b$ 值,进行预测。再根据 $D$ 值的变化判断系统的稳定性。

## 三、实例分析

木城涧矿千军台坑 741003 工作面<sup>[19]</sup>,煤层平均厚度为 2.6 m,顶板由层状的细砂岩及粉砂岩组成,坚硬呈脆性,单向抗压强度在 100 MPa 以上。直接顶总厚度为 5 m,为粉砂岩;老顶总厚度为 7~10 m,为粉细砂岩。用 DKJ-D-1 自动监测系统监测声发射和顶板沉降,监测系统每半小时自动采集一次数据,并整理为按班(每 8 小时为一班)的平均数据曲线(如图 10-8 所示)。冲击地压发生时间为 18 日 8 时。

根据观测数据,反演出系统的非线性动力学模型如下:

$$\frac{dx}{dt} = -0.08513(x^3 - 3.028x - 1.8367) \quad (10-36)$$

预测出的位移值如图 10-8 所示,可看出预测效果比较理想。分别取起始点到某个计算点的数据逐次反演,可算出一系列 $(a, b, D)$ 值。从图 10-8 发现,开始 $D$ 值呈比较稳定的变化,然后急剧速增出现一峰值点(约为稳定变化时的 5000 倍),在临近失稳时, $D < 0$  ( $b < 0$ )并接近于零。我们可以根据这一特殊现象,判断冲击地压的发生。这种现象与滑坡的 $D$ 值演化特征(见第七章)类似。

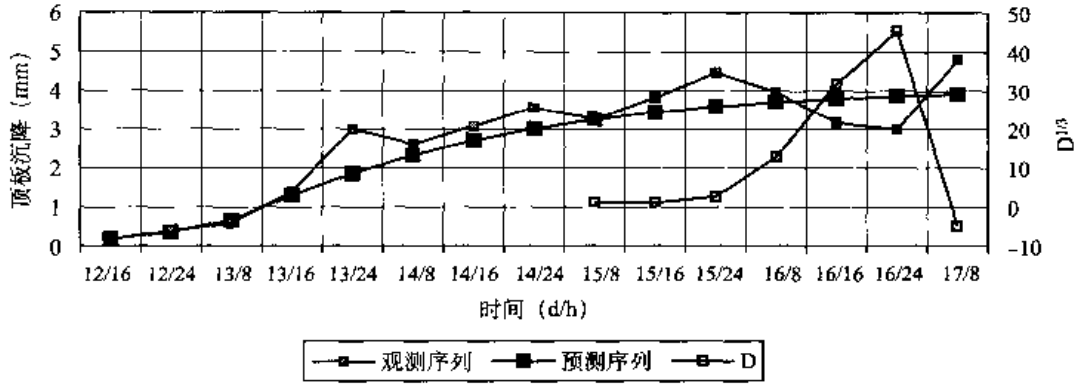


图 10-8 木城洞矿千军台坑 741003 工作面顶板沉降观测记录

## 第四节 系统演化的声发射非线性动力学模型 与失稳过程的声发射特征

### 一、系统的声发射非线性动力学模型

声发射(AE)是岩石内部损伤破坏产生的弹性波,它必然与岩石的损伤变量有关,秦四清<sup>[20]</sup>和唐春安<sup>[21]</sup>对单轴压缩条件下岩样损伤与 AE 计数的关系进行了研究,给出:

$$N = N_m D(\varepsilon) = N_m \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right] \right\} \quad (10-37)$$

式中,  $N$  是在应变为  $\varepsilon$  时的 AE 累计计数;  $N_m$  是岩石完全损伤时的 AE 总计数。对时间求导得到声发射率(AER)的表达式为:

$$\frac{dN}{dt} = N_m \frac{m}{\varepsilon_0} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{m-1} \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (10-38)$$

把上式表达为无量纲位移  $x$  的表达式为:

$$\frac{dN}{dt} = N_m (m+1) (x+1)^{m-1} \exp \left[ - \left( \frac{m+1}{m} \right) (x+1)^m \right] \frac{dx}{dt} \quad (10-39)$$

考虑岩石内部单元强度的随机分布,上式可变为:

$$\frac{dN}{dt} = RND(x) N_m (m+1) (x+1)^{m-1} \exp \left[ - \left( \frac{m+1}{m} \right) (x+1)^m \right] \frac{dx}{dt} \quad (10-40)$$

式中,  $RND$  是一个介于 0 和 1 之间的随机值。

Kaiser 和 Tang<sup>[22]</sup>认为,对坚硬的顶板和底板, AE 主要由煤柱损伤破坏产生。把式(10-29)代入式(10-40),得到:

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{1}{6} \frac{E}{\eta} RND(x) N_m \alpha(m) (x+1)^{m-1} \exp \left[ - \left( \frac{m+1}{m} \right) (x+1)^m \right] (x^3 + ax + b) \quad (10-41)$$

式中,

$$\alpha(m) = \frac{m(m+1)^3}{\exp \left( \frac{m+1}{m} \right)} \quad (10-42)$$

上式是煤柱-顶板系统演化过程中 AER 的表达式。它与煤柱的弹模、黏滞系数、脆性指标及系统控制参数等有关,并且  $E$  和  $\eta$  仅影响 AER 的幅度,对其变化过程无影响。

## 二、系统失稳过程的声发射模式与特征

用式(10-41)可以对煤柱-顶板系统失稳演化过程的 AER 变化进行模拟,模拟采用位移控制模式加载。取  $E/\eta = 0.01$ ,  $N_m = 10000$ ,  $k_0 = 1000$ ,  $u_0 = 0.2$  且保持不变,各参数满足失稳发生的充要条件  $D = 0$ ,分析  $k$  和  $m$  的变化对 AER 的影响。

谢和平等发现<sup>[1]</sup>,在临近破坏时,微震频度增加,一般是稳态噪音频度的 10 到 100 倍。这种增加在即将岩爆时会出现一个奇迹般的减小,这个现象称为微震异常。实际观测发现:微震异常通常出现在岩爆发生前;某些岩爆发生在微震活跃期,而某些岩爆发生在相对平静阶段。这些观测与我们取不同  $m$  值时模拟出的 AER 变化规律(如图 10-9 ~ 10-12 所示)一致,即冲击地压发生在 AER 上升后的下降或相对平静阶段。

从图 10-9 ~ 10-12 可看出,随  $m$  值增大,即煤柱的均匀性或脆性增大,AE 活动集中区将由远离峰值荷载前,通过峰值荷载附近,向峰值荷载后转移。AER 幅度随  $m$  值的增大而升高,表明释放的能量增大,冲击地压越猛烈。

$m$  值小时(如  $m = 1$ ),煤柱内部微单元的强度分布很不均匀(强的各向异性)且强度较低,加载时 AE 事件比较分散且大都出现在荷载峰值前,每个 AER 峰值基本对应一个或很少个微单元的破坏,所以 AER 峰值较低。 $m$  值较大时(如  $m = 20$ 、80),微单元的强度

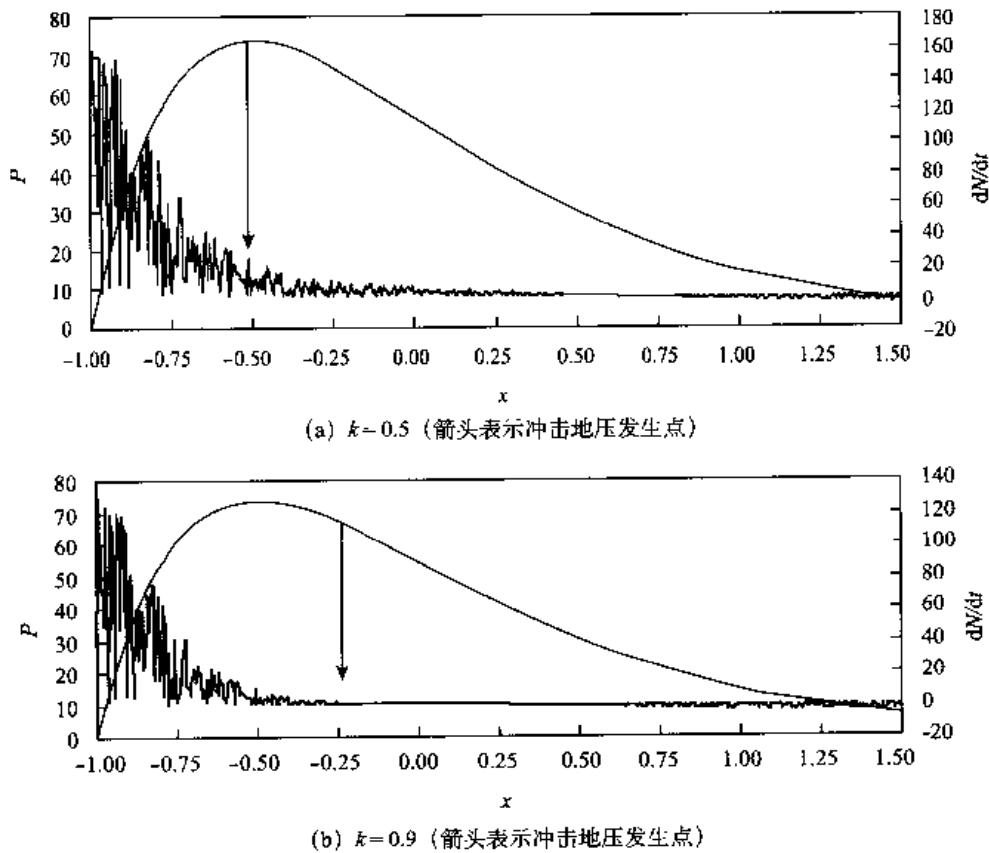
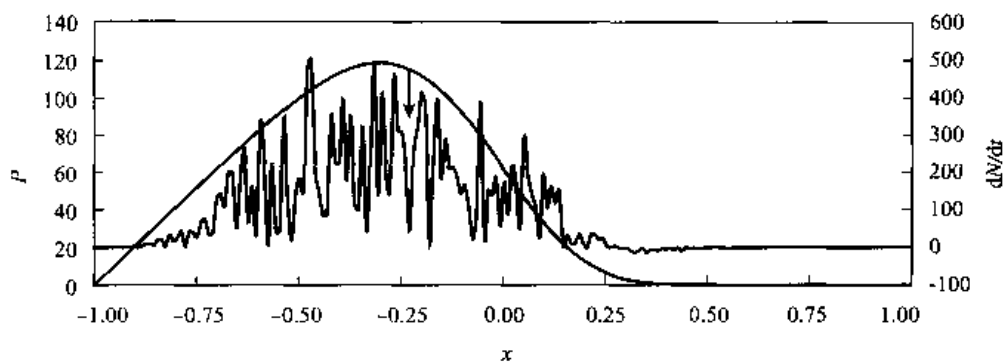
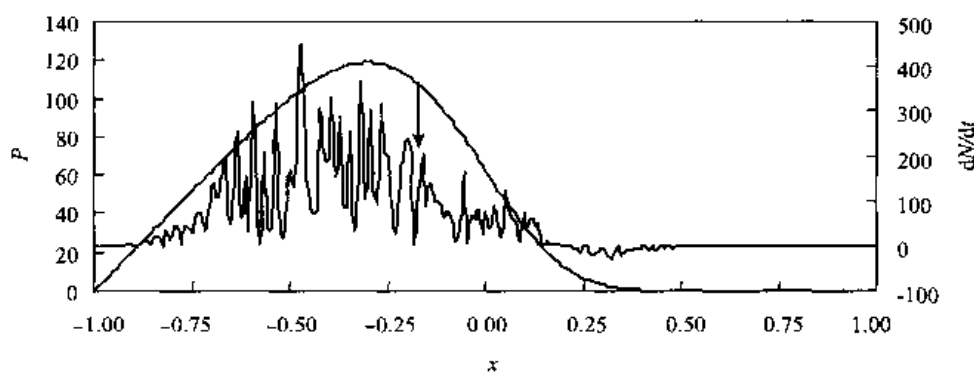


图 10-9  $m = 1$ ,  $D = 0$  时,不同刚度比时荷载及 AER 对  $x$  的关系





(a)  $k=0.1$  (箭头表示冲击地压发生点)



(b)  $k=0.5$  (箭头表示冲击地压发生点)

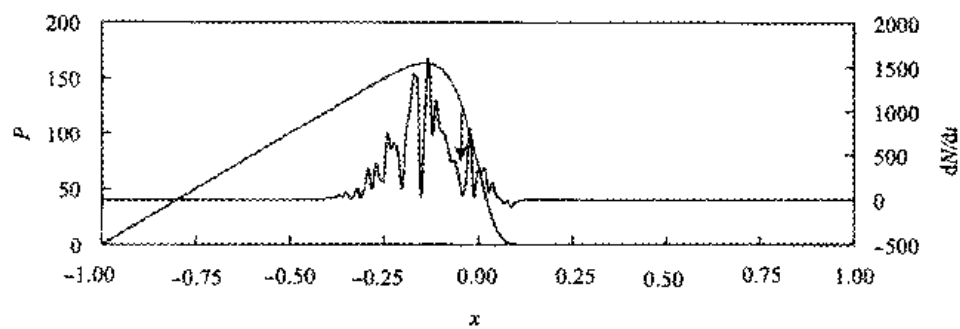
图 10-10  $m=5$ ,  $D=0$  时, 不同刚度比时荷载及 AER 对  $x$  的关系

分布比较均匀且强度较高, 所以, AE 活动多出现在近峰值荷载前后; 每个 AER 峰值对应着多个微单元的同时或基本同时的破坏<sup>[5]</sup>, 所以 AER 值较大。

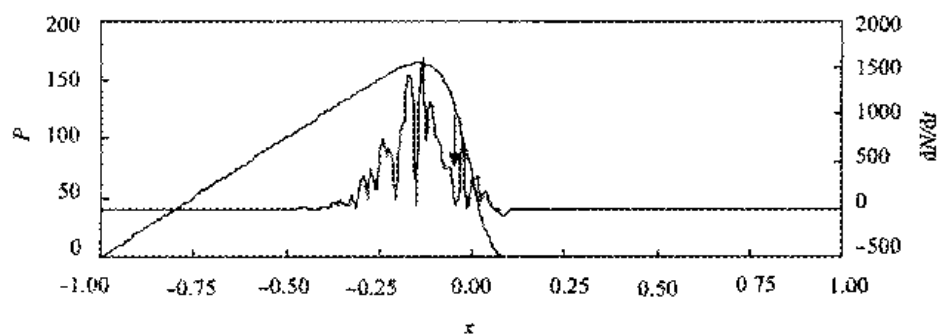
图 10-10、10-11 和 10-12 分别说明了三个不同 AE 序列的模式。①群震模式(图 10-10,  $m=5$ ); ②前震—主震—余震模式(图 10-11,  $m=20$ ); ③主震模式(图 10-12,  $m=80$ )。这些观察与 Mogi<sup>[23]</sup>依据试验工作的发现一致, 说明在结构均匀性上的差别会导致不同的 AE 模式。

对同一个  $m$  值, 随  $k$  的增大失稳点位置后移(临界位移  $x_{2,3}$  增大), AER 的幅度减小, 能量释放减小。 $m=1$  时(如图 10-9b), 失稳前 AE 活动降低, 出现平静期, 预报人员可能会被从异常转平静的假象所迷惑, 难以作出预报;  $m=5$ (如图 10-10 所示), AE 活动为群震模式, 作出预报也较困难;  $m=20$  时(如图 10-11 所示), 失稳前出现明显的前兆异常, 比较容易预报;  $m=80$ (如图 10-12 所示), 失稳前异常值不太明显, 持续时间短且紧邻失稳, 作出预报也较困难。可见, 煤柱—顶板系统失稳的可预报性主要取决于煤柱材料的均匀性指标或脆性指标  $m$  值,  $m$  值太大或太小都不易预报。较好的预报方法是结合试验(确定  $m$ ,  $k$  等参数)、顶板沉降观测与煤柱 AE 监测, 根据(10-41)式进行物理预报。

为对比冲击地压发生( $D=0$ )与不发生( $D \neq 0$ )的 AER 变化情况, 下面结合图 10-13 作进一步分析。对图 10-13( $m=2$ )分析发现, 发生冲击地压的 AE 的活跃期出现在峰值荷载前, 失稳前 AE 活动明显降低; 不发生冲击地压时, AER 幅度较高, AE 在峰值荷载前后一直活跃, 持续时间长并较明显, 呈现较为均匀的变化, 这说明煤柱在缓慢变形过程中,

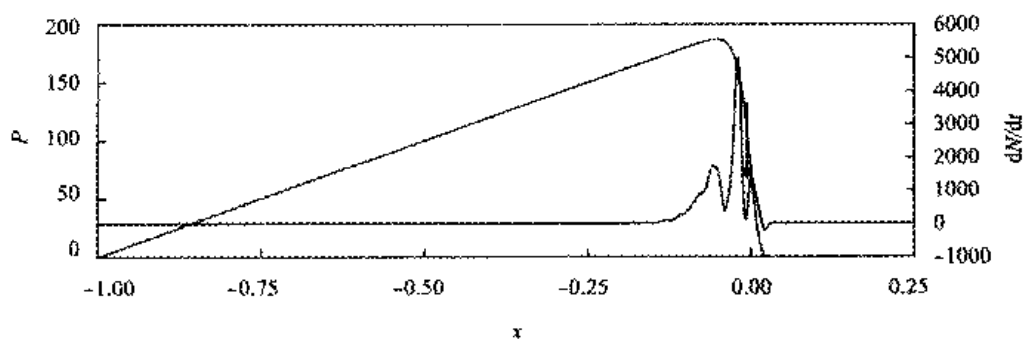


(a)  $k=0.1$  (箭头表示冲击地压发生点)

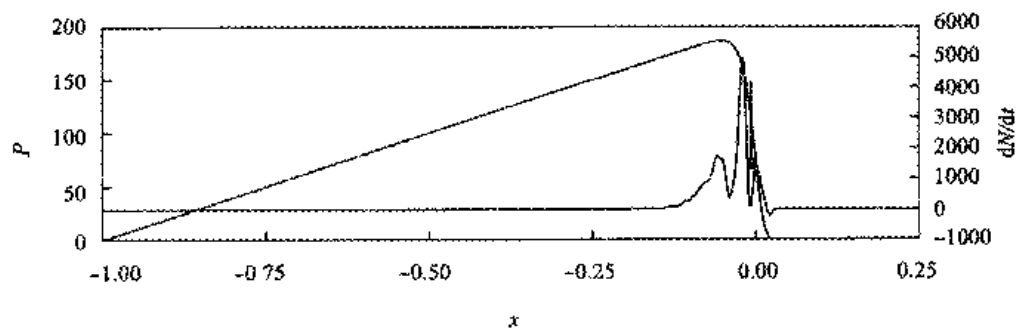


(b)  $k=0.5$  (箭头表示冲击地压发生点)

图 10-11  $m=20$ ,  $D=0$  时, 不同刚度比时荷载及 AER 对  $x$  的关系



(a)  $k=0.1$  (箭头表示冲击地压发生点)



(b)  $k=0.5$  (箭头表示冲击地压发生点)

图 10-12  $m=80$ ,  $D=0$  时, 不同刚度比时荷载及 AER 对  $x$  的关系

破坏是逐渐发生的，能量是逐渐释放的，是一稳态过程，不会发生猛烈的破坏。根据这一现象，在实际监测工作中如发现 AE 活动活跃后的突然下降或平静阶段，应及时综合分析，作出合理预报。

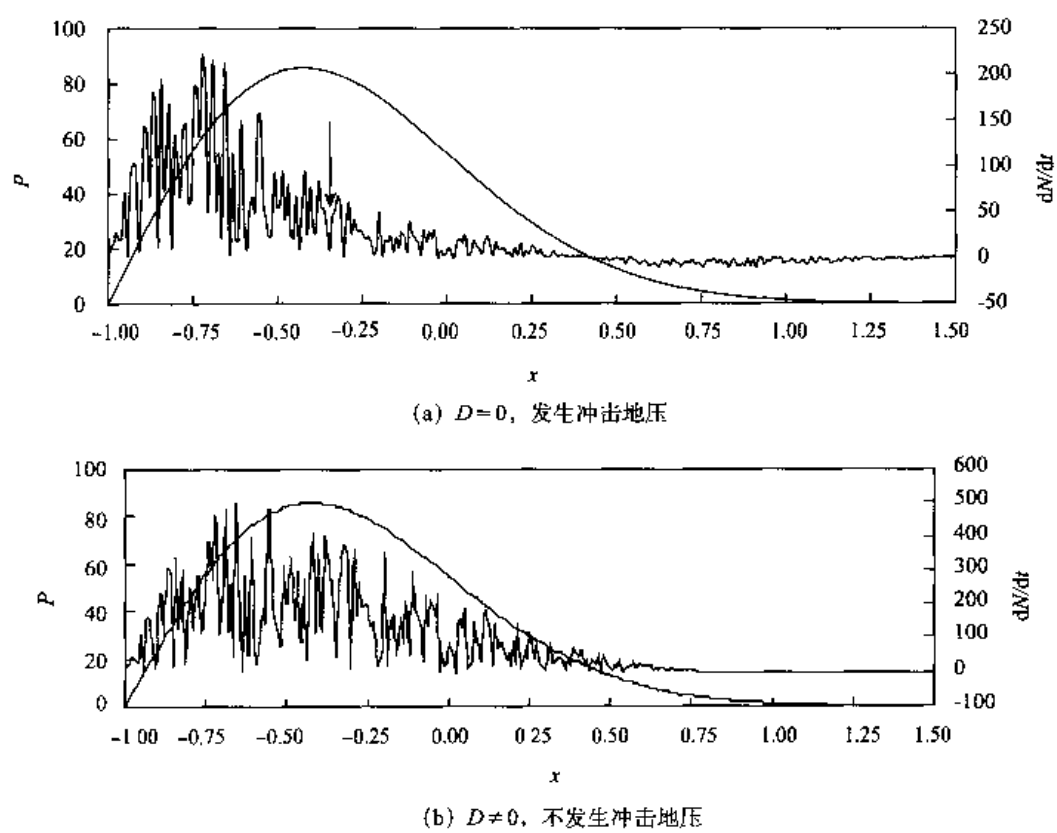


图 10-13  $m=2, k=0.5$  时荷载与 AER 对无量纲位移  $x$  的变化

以上分析说明，AE 活动不仅与  $m$  和  $k$  有关，而且与系统的控制参数  $a$  和  $b$  及分岔集方程  $D$  有关，即与系统的演化路径有关，失稳系统与不失稳系统的 AE 图像有本质区别。

### 三、系统失稳过程的分维特征

谢和平等<sup>[1]</sup>分析了岩爆过程的微震活动，认为是一种分形结构，并通过对实际观测资料的分析发现，接近发生岩爆时，有降维现象。我们利用他提出的分维计算方法，对上述 AE 活动模拟试验数据进行了分维计算。从图 10-14 可看出，不同  $m$  值时，分维随  $x$  的变化规律不同； $m$  值相同时， $k$  对分维变化规律的影响不大，这说明分维的变化规律主要取决于  $m$  值。 $m=1$  时，冲击地压都发生在分维突然下降后的阶段。 $k=0.9$  时，发生在最小分维值点； $k=0.5$  时，发生在分维突然下降后的稍微上升阶段。 $m=5$  时，分维先上升后下降，然后变化比较平稳且略有上升，冲击地压发生在平稳阶段的某个  $x$  处。 $k$  值对分维的影响很小。

能否根据降维现象预测冲击地压发生呢？答案应该是：有时可以，有时不可以。因为从图 10-15 可看出，有冲击地压时，它发生在分维值稍微下降后的上升阶段，然后分维值迅速减小；无冲击地压时，分维值反而有较长阶段的显著降维现象，然后上升。降维现象与冲

击地压的发生并无本质的对应联系, 用分维作为反映冲击地压活动的前兆指标也是不可靠的。

以上分析说明, 分维值的变化主要受材料均匀性(或脆性指标) $m$  值及系统演化路径的控制, 不同的  $m$  值及不同的系统演化路径对应着不同的 AE 图像和分维涵义。对冲击地压的预报, 单纯用 AE 或微震技术是要冒很大风险的, 是不可靠的。正确的方法是走物理预报的道路, 走综合预报的道路。

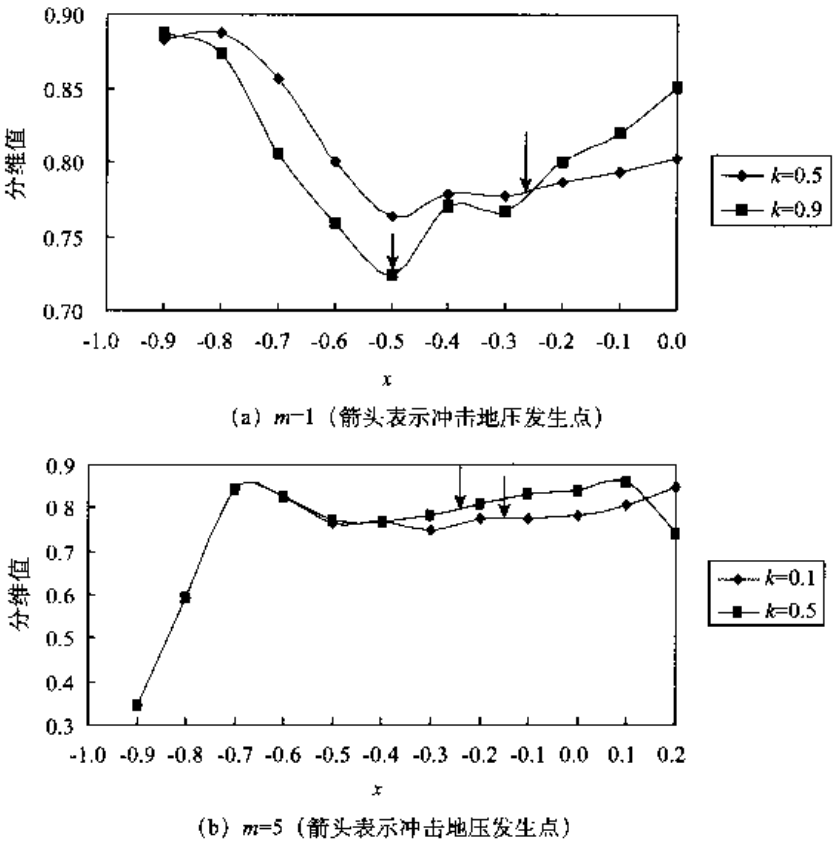


图 10-14 不同  $m$  值时, 分维随无量纲位移  $x$  的变化

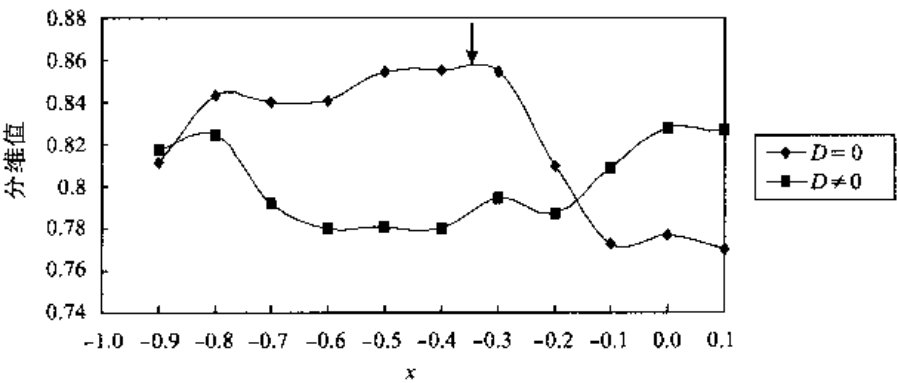


图 10-15  $m=2$ ,  $k=0.5$  时, 发生( $D=0$ )和不发生冲击地压( $D\neq 0$ )的分维随无量纲位移  $x$  的变化

## 第五节 结 论

1) 把坚硬的顶板视为弹性梁,把煤柱视为应变软化介质并采用 Weibull 分布描述它的损伤本构模型,对煤柱-顶板系统的失稳,用突变理论方法进行了研究。通过对建立的尖点突变模型的分析发现,系统失稳主要取决于梁的抗弯刚度与煤柱介质在本构曲线拐点处的刚度比  $k$  以及材料的均匀性或脆性指标  $m$  值,并给出了失稳的充要条件力学判据。

2) 考虑煤柱介质的黏性属性或变形的蠕变性,提出了一个系统演化的非线性动力学模型(物理预报模型),可以根据试验确定的力学参数及现场调查给出的几何参数,进行煤柱-顶板系统的冲击地压物理预报。顶板沉降的观测数据包含有丰富的反映系统力学参数的信息,有可能根据观测数据,反演其力学参数。

3) 对木城涧矿顶板沉降的非线性分析表明,分岔集方程值  $D$  在远离失稳时,变化比较稳定;临近失稳时,快速增长出现一高峰值,然后急剧下降,可以根据这一明显特征,预报冲击地压的发生。根据材料损伤与 AE 事件的对应关系,建立了系统演化过程中 AER 的动力学模型。对模型进行数值模拟发现,均匀性指标  $m$  值及系统的演化路径对 AE 活动规律有很大影响,呈现出复杂的变化。系统的可预报性取决于  $m$  的数值, $m$  太大或太小都很难预报。总之,单纯根据 AE 或微震活动预报冲击地压是不可靠的,很难实现。

4) 用分形理论分析了模拟得到的 AER 数据,发现分维的变化也主要依赖于  $m$  值和系统的演化路径,降维现象与冲击地压的发生有时是对应的,有时不对应,并无必然的联系。根据降维现象预报冲击地压同样也是不可靠的。总之,解决冲击地压预报的根本出路是实现物理预报和综合预报。

## 参 考 文 献

- [1] Xie H and Parisseau W C. Fractal character and mechanism of rock bursts. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 30, 343 ~ 350. 1993.
- [2] 潘一山,李忠华,章梦涛.我国冲击地压分布、类型、机理及防治研究. *岩石力学与工程学报*, 2003, Vol. 22, No. 11, 1854 ~ 1851.
- [3] 章梦涛.冲击地压和突出的统一失稳理论. *煤炭学报*, 1991, Vol. 16, No. 4, 25 ~ 31.
- [4] 章梦涛.冲击地压失稳理论与数值模拟计算. *岩石力学与工程学报*, 1987, Vol. 6, No. 3, 197 ~ 204.
- [5] 唐春安.岩石破裂过程中的灾变.北京:煤炭工业出版社,1993.
- [6] Hudson J A, Crouch S L and Fairhurst C. Soft, stiff and servo-controlled testing machine: a review with reference to rock failure. *Engng Geol.*, Vol. 6, 155 ~ 189. 1972.
- [7] Thom R. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Benjamin, New York. 1972.
- [8] 秦四清,张倬元,王士天,黄润秋.非线性工程地质学导引.成都:西南交通大学出版社,1993.
- [9] Henley S. Catastrophe theory models in geology. *Mathematical Geology* 8(6): 649 ~ 655. 1976.
- [10] 潘一山,章梦涛.用突变理论分析冲击地压发生的物理过程. *阜新矿业学院学报*, 1992, Vol. 11, No. 1, 12 ~ 18.
- [11] 徐曾和,徐小荷,唐春安.坚硬顶板下煤柱岩爆的尖点突变理论分析. *煤炭学报*, 1995, Vol. 20, No. 5, 485 ~ 491.
- [12] 周辉,冯夏庭,谭云亮,王泳嘉.矿震系统的胞映射—突变预测模型. *中国有色金属学报*, 2002, Vol. 12, No. 1, 155 ~ 160.
- [13] Rat M. Difficulties in foreseeing failure in landslides-La Clapière. French Alps. *Proceed. 5<sup>th</sup> ISL, Lausanne*, Vol. 3, 1503 ~ 1505. 1988.

- [14] Krajinovic D, and Silva M D. Statistical aspects of the continuous damage theory. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 18, 551 ~ 562. 1982.
- [15] Hudson J A and Fairhurst C. Tensile strength, Weibull's theory and a general statistical approach to rock failure. In *The Proceedings of the Southampton 1969 Civil Engineering Materials Conference (Part 2)* (ed. Tereni, M.), 901 ~ 904. 1969.
- [16] Siqing Qin, Sijing Wang, Hui Long, Jun Liu. A new approach to estimating geo-stresses from laboratory Kaiser effect measurements. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, Vol. 36, 1073 ~ 1077. 1999.
- [17] 刘鸿文主编. 材料力学. 北京: 高等教育出版社, 1991.
- [18] 费鸿禄, 唐春安, 徐小荷. 突变理论研究单轴加载失稳与实验验证. *中国有色金属学报*, 1995, Vol. 5, No. 4, 31 ~ 34.
- [19] 谭云亮, 王学永. 煤矿坚硬顶板活动过程中声发射特征的初步研究. *岩石力学与工程学报*, 1992, Vol. 11, No. 3, 275 ~ 283.
- [20] 秦四清, 李造鼎, 张倬元. 岩石声发射技术概论. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.
- [21] Tang C A, Chen Z H, Xu X H, and Li C. A theoretical model for Kaiser effect. *Pure appl. Geophys*, Vol. 150, 203 ~ 215. 1997.
- [22] Kaiser P K and Tang C A. Numerical simulation of damage accumulation and seismic energy release during brittle rock failure-Part II: Rib pillar collapse, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 35, No. 2, 123 ~ 134. 1998.
- [23] Mogi K. *Earthquake prediction*. Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, Tokyo. 1985.